

УДК 681.518.3

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

Чувькин Борис Викторович, доктор технических наук, профессор, Пензенский государственный университет, 440026, Российская Федерация, г. Пенза, ул. Красная, 40, тел. 8 (8412) 36-82-38, e-mail: irina-penza@mail.ru, chuvykin_bv@mail.ru

Долгова Ирина Анатольевна, кандидат технических наук, доцент, Пензенский государственный университет, 440026, Российская Федерация, г. Пенза, ул. Красная, 40, тел. 8 (8412) 36-82-38, e-mail: irina-penza@mail.ru, chuvykin_bv@mail.ru

Еременко Алексей Владимирович, кандидат технических наук, доцент, Пензенский государственный университет, 440026, Российская Федерация, г. Пенза, ул. Красная, 40, тел. 8 (8412) 36-82-38, e-mail: irina-penza@mail.ru, chuvykin_bv@mail.ru

В статье решается задача определения условий возникновения периодических колебаний в нелинейных непрерывно-дискретных системах на примере сигма-дельта модулятора третьего порядка, который является основным элементом в структуре высокоточного сигма-дельта аналого-цифрового преобразователя.

Наличие периодических колебаний в непрерывно-дискретных системах является необходимым условием устойчивой работы модулятора и обеспечение высокой точности аналого-цифрового преобразования. В статье приводится метод компьютерного моделирования для нахождения граничных значений коэффициентов обратной связи сигма-дельта модулятора для режима перехода к хаотическим колебаниям. В основе метода положен анализ состояния вход/выход интеграторов в фазовой плоскости и анализ спектра выходных сигналов сигма-дельта модулятора третьего порядка, что позволяет получать количественные оценки чувствительности к отклонениям значений коэффициентов обратной связи от граничных значений, соответствующих устойчивому состоянию наличия периодических колебаний.

Приводится simulink-модель сигма-дельта модулятора третьего порядка, в прямом канале которого включены аналоговые интеграторы, охваченные импульсной обратной связью. Даны количественные результаты моделирования и графические иллюстрации перехода от режима периодических колебаний непрерывно-дискретной системы к режиму хаотических колебаний.

Ключевые слова: нелинейные непрерывно-дискретные системы, сигма-дельта АЦП, сигма-дельта модулятор, периодические колебания, хаотические колебания, фазовая плоскость, спектральный анализ, устойчивость

PERIODIC FLUCTUATIONS IN NONLINEAR CONTINUOUS-DISCRETE SYSTEMS: ANALYSIS OF STABILITY

Chuvykin Boris V., D.Sc. (Engineering), Professor, Penza State University, 40 Krasnaya St., Penza, 440026, Russian Federation, phone 8 (8412) 36-82-38, e-mail: irina-penza@mail.ru, chuvykin_bv@mail.ru

Dolgova Irina A., Ph.D. (Engineering), Associate Professor, Penza State University, 40 Krasnaya St., Penza, 440026, Russian Federation, phone 8 (8412) 36-82-38, e-mail: irina-penza@mail.ru, chuvykin_bv@mail.ru

Yeremenko Alexey V., Ph.D. (Engineering), Associate Professor, Penza State University, 40 Krasnaya St., Penza, 440026, Russian Federation, phone 8 (8412) 36-82-38, e-mail: irina-penza@mail.ru, chuvykin_bv@mail.ru

The article discusses the challenge of using a nonlinear continuous-discrete (NCD) system to determine the causes of its periodic fluctuations. The NCD system would contain a third-order sigma-delta modulator, a key element in the structure of a high-precision sigma-delta analog-to-digital converter. The presence of periodic fluctuations in continuous-discrete systems, the critique relates, is a necessary condition for stable modulator functioning and high-precision analog-to-digital conversion. The document presents a method of computer simulation that establishes the boundary values for feedback coefficients of the sigma-delta modulator whenever chaotic fluctuations for mode transition occur. The method is based on an analysis of the integrator input/output in the phase plane and of the output signals from the third-order sigma-delta modulator. It enables the user to obtain quantitative estimates of the latter device's sensitivity to variation-coefficient-value feedback from the boundary values, which corresponds to a steady availability state for periodic fluctuations. The commentary notes that a Simulink-model is used by the third-order sigma-delta modulator, which includes direct-channel analog integrators and provides covered-pulse feedback. Finally, the blueprint presents the quantitative results of the simulation and a graphical illustration of the NCD system's transition from periodic to chaotic fluctuations.

Keywords: nonlinear continuous-discrete systems, sigma-delta ADC, sigma-delta modulator, periodic fluctuations, chaotic fluctuations, phase plane, spectral analysis, stability

В настоящее время благодаря сочетанию уникальных свойств: высокой точности (до 24 разрядов), линейности, малого энергопотребления, сигма-дельта АЦП ($\Sigma\Delta$ -АЦП) широко используются в нелинейных непрерывно-дискретных системах (например, датчиково-преобразующая аппаратура). Одним из важнейших элементов в $\Sigma\Delta$ -АЦП является преобразователь аналогового сигнала в цифровую однобитную последовательность. Классическая структура такого преобразователя – это $\Sigma\Delta$ -модулятор, в прямом канале которого включены аналоговые интеграторы, охваченные импульсной обратной связью. Сигнал обратной связи представляет собой двухуровневый сигнал, формируемый однобитным ЦАП.

При проектировании непрерывно-дискретных систем возникает необходимость обеспечения устойчивости работы $\Sigma\Delta$ -модулятора как элемента таких систем. Для обеспечения устойчивости требуется провести анализ условий возникновения периодических и хаотических колебаний с целью выбора значений постоянных времени интеграторов.

Рассмотрим условия возникновения периодических и хаотических колебаний в нелинейной непрерывно-дискретной системе, включающей $\Sigma\Delta$ -модулятор третьего порядка [2–4]. Модель структуры такой системы разработана в среде Matlab Simulink и представлена на рис. 1.

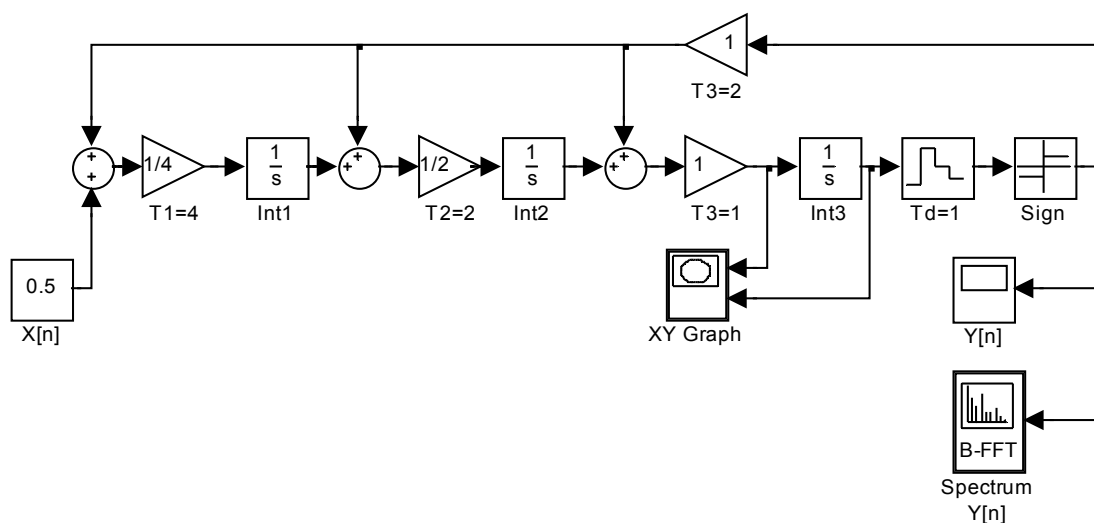


Рис. 1. Вариант структуры $\Sigma\Delta$ -модулятора третьего порядка

Математическая модель сигма-дельта модулятора третьего порядка в виде системы разностных уравнений (1) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} U_{1[n]} = U_{1[n-1]} + \frac{T_d}{T_1} (X_{[n-1]} - Y_{[n-1]}); \\ U_{2[n]} = U_{2[n-1]} + \frac{T_d}{T_2} \left(U_{1[n-1]} - Y_{[n-1]} + \frac{T_d}{2T_1} (X_{[n-1]} - Y_{[n-1]}) \right); \\ U_{3[n]} = U_{3[n-1]} + \frac{T_d}{T_3} \left(U_{2[n-1]} - Y_{[n-1]} + \frac{T_d}{2T_2} \left(U_{1[n-1]} - Y_{[n-1]} + \frac{T_d}{3T_1} (X_{[n-1]} - Y_{[n-1]}) \right) \right); \\ Y_{[n]} = \text{sign}(U_{3[n]}). \end{cases}, (1)$$

где $X_{[n]}$ – амплитуда входного сигнала; $Y_{[n]}$ – амплитуда выходного сигнала на n -ом цикле преобразования; T_d – период цикла преобразования; $U_{1[n]}$, $U_{2[n]}$, $U_{3[n]}$ – амплитуды выходных сигналов интеграторов в конце n -ого цикла преобразования; T_1 , T_2 , T_3 – постоянные времени интеграторов.

В данной модели (см. рис. 1) период цикла преобразования принят $T_d = 1$, а значения постоянных времени интеграторов подобраны таким образом ($T_1 = 4$, $T_2 = 2$, $T_3 = 1$), что в заданном диапазоне изменения значений входного сигнала X наблюдается устойчивая работа $\Sigma\Delta$ -модулятора.

На рис. 2 в фазовой плоскости представлен график зависимости выходного сигнала (по оси Y) от входного сигнала (по оси X) для интегратора Int 3 (см. рис. 1) при значении сигнала на входе системы $X = 0,5$. Замкнутая траектория на рис. 2 свидетельствует о наличии в системе периодического процесса.

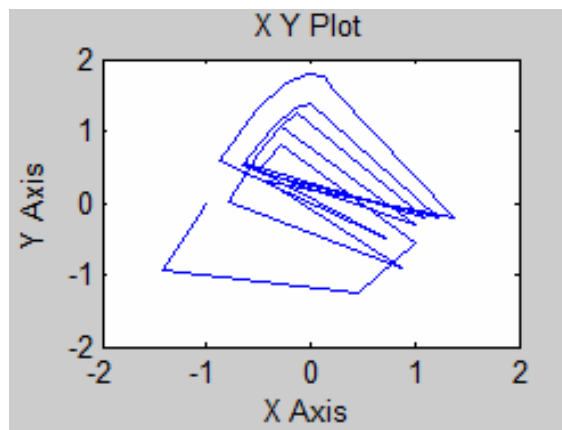


Рис. 2. График зависимости выходного сигнала от входного сигнала для интегратора Int 3

Значение периода колебаний можно определить по спектру выходного сигнала, приведенного на рис. 3, или непосредственно по виду однобитного сигнала с выхода элемента Sign, представленного на рис. 4 (в данном случае период $T = 16$ тактам работы $\Sigma\Delta$ -модулятора) [1].

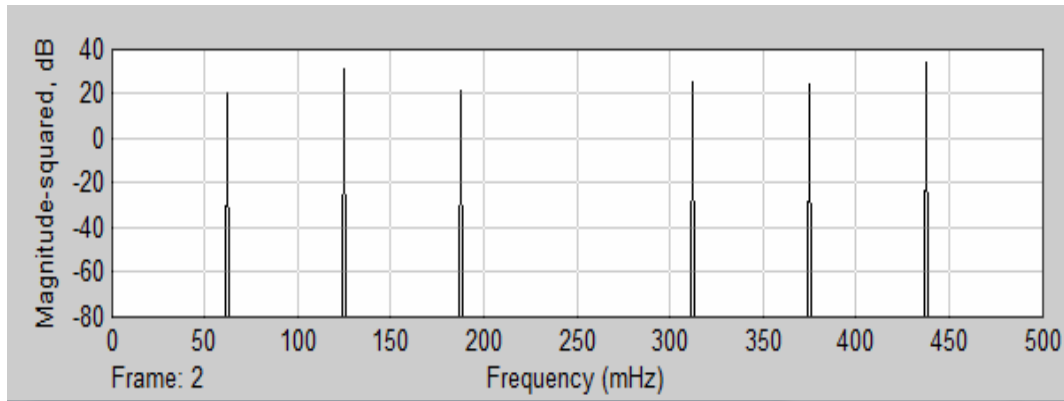


Рис. 3. Спектр выходного сигнала

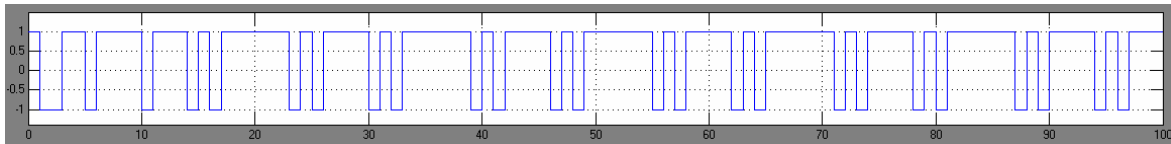


Рис. 4. Однобитный сигнал с выхода элемента Sign

Результаты моделирования показали, что при отклонении значения сигнала на входе системы X от $X = 0,5$ на величину большую 10^{-9} наблюдается постепенный переход от периодических к хаотическим колебаниям. На рис. 5 представлен график зависимости выходного сигнала от входного сигнала для интегратора Int 3.

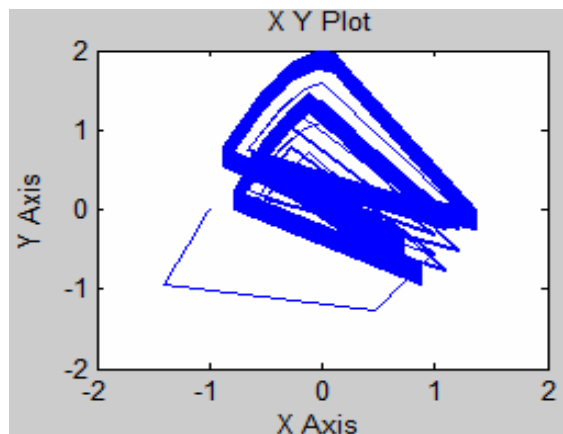


Рис. 5. График зависимости выходного сигнала от входного сигнала для интегратора Int 3 при $X > 0,5 + 10^{-9}$

Наличие незамкнутой траектории на рис. 5 свидетельствует о наличии в системе хаотического процесса. Это подтверждает и вид спектра выходного сигнала, приведенный на рис. 6.

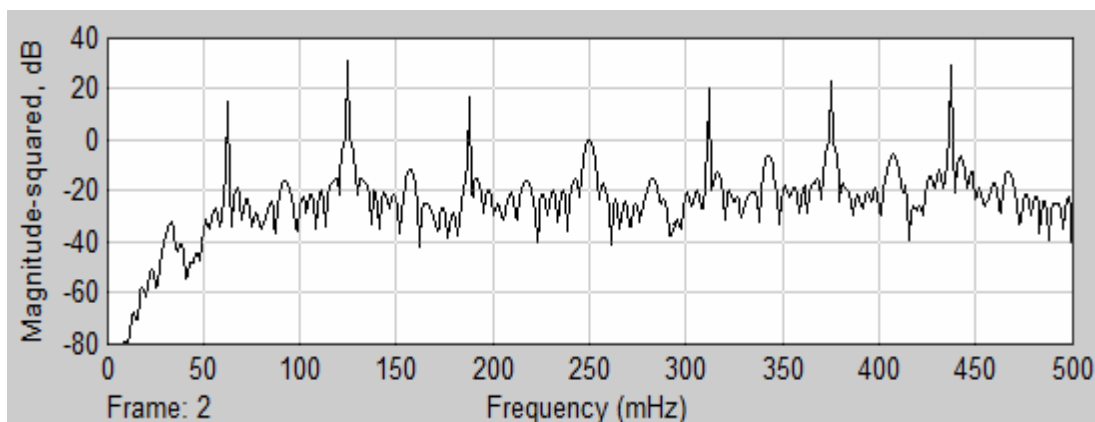


Рис. 6. Спектр выходного сигнала при $X > 0,5 + 10^{-9}$

Таким образом, исследование модели (рис. 1) показало, что в нелинейных непрерывно-дискретных системах возникают как периодические, так и хаотические колебания. В результате проведенного анализа устойчивости периодических колебаний $\Sigma\Delta$ -модулятора третьего порядка, в прямом канале которого включены аналоговые интеграторы, охваченные импульсной обратной связью, выяснилось, что имеет место очень высокая чувствительность нахождения системы в устойчивом состоянии (наличие процесса периодических колебаний) к отклонению значения амплитуды входного сигнала от заданной величины (на 10^{-9}). При этом наблюдается переход системы в неустойчивое состояние (возникает процесс хаотических колебаний).

Список литературы

1. **Шахов Э. К.** $\Sigma\Delta$ -АЦП: Цифровая фильтрация и децимация / Э. К. Шахов, Б. В. Чувькин // Датчики и системы. – 2007. – № 2. – С. 44–50.
2. **Швец В.** Архитектура сигма-дельта АЦП и ЦАП / В. Швец, Ю. Нищирет // Chip News. – 1998. – № 2. – С. 2–11.
3. **Schreier R.** Delta-Sigma Data Converters: Theory, Design and Simulation / R. Schreier, S. R. Norsworthy, G. C. Temes. – IEEE Computer Society Press, 1996. – 476 p.
4. **Schreier R.** Understanding delta-sigma data converters / R. Schreier, G. C. Temes. – New Jersey : IEEE Press, 2005. – 446 p.

References

1. Shakhov E. K., Chuvykin B. V. $\Sigma\Delta$ -ATsP: Tsifrovaya filtratsiya i detsimatsiya [$\Sigma\Delta$ -ADC: Digital filtering and decimation]. *Datchiki i sistemy* [Sensors and Systems], 2007, no. 2, pp. 44–50.
2. Shvets V., Nishchiret Yu. Arkhitektura sigma-delta ATsP i TsAP [Architecture of sigma-delta ADC and DAC]. *Chip News*, 1998, no. 2, pp. 2–11.
3. Schreier R., Norsworthy S. R., Temes G. C. *Delta-Sigma Data Converters: Theory, Design and Simulation*. IEEE Computer Society Press, 1996. 476 p.
4. Schreier R., Temes G. C. *Understanding delta-sigma data converters*. New Jersey, IEEE Press, 2005. 446 p.