

tion. Electrotechnical complexes and systems], 2007, no. 2 (20). Available at: <http://aaccs.org/kovrigo-yum-fomenko-by-polishuk-ia-matematicheskoe-modelirovanie-sistem-avtomaticheskogo-regulirovaniya-s-uchetom-ogranichenii-na-upravlenie-v-pakete-atlab.html> (accessed 05.01.2014).

12. Maksimey I. V. *Imitatsionnoe modelirovanie slozhnykh system. Ch. 1. Matematicheskie osnovy* [Simulation modeling of complex systems. Part 1. Mathematical foundations], in 3 parts. Minsk, Belarus State University Publ., 2009. 264 p.

13. Mett A. Yu. *Sistemy upravleniya kataliticheskimi protsessami vtorichnoy pererabotki nefiti* [Oil recycling catalytic process control system]. Baku, Elm, 1991. 331 p.

14. Oil product production. Motor gasoline. Available at: <http://www.statinfo.biz/Data.aspx?act=1050&lang=1> (accessed 5 January 2014).

15. Reshetnikov S. I., Ivanov Ye. A. Matematicheskoe modelirovanie kataliticheskikh protsessov s nestatsionarnym sostoyaniem katalizatora: periodicheskie vozdeystviya [Mathematical modeling of catalytic processes with a nonstationary state of a catalyst: periodic impact]. *Sibirskiy zhurnal industrialnoy matematiki* [Siberian Journal of Industrial Mathematics], 2002, vol. 5, no. 4 (12), pp. 128–138.

16. Sovetov B. Ya., Yakovlev S. A. *Modelirovanie sistem* [System modeling]. Moscow, Vysshaya shkola, 2001. 343 p.

17. Sugungun M. M. *Kinetiko-termodinamicheskoe modelirovanie protsessa kataliticheskogo krekninga tyazhelykh neftyanykh fraktsiy* [Kinetic and thermodynamic modeling of catalytic cracking process of heavy oil fractions]. Moscow, 1997. 173 p.

18. Shapkarin A. V., Prosandeev A. V., Kullo I. G. Analiz nelineynykh sistem avtomaticheskogo upravleniya metodom garmonicheskogo balansa v srede MATLAB [Analysis of nonlinear automatic control systems by harmonic balance method in MATLAB]. *Prikaspiyskiy zhurnal: upravlenie i vysokie tekhnologii* [Caspian Journal: Management and High Technologies], 2013, no. 1 (21), pp. 77–84.

19. Shikulskaya O. M., Mukhina T. P. Funktsionalnoe modelirovanie korektsii additivnoy temperaturnoy pogreshnosti [Functional modeling of additive temperature error correction]. *Prikaspiyskiy zhurnal: upravlenie i vysokie tekhnologii* [Caspian Journal: Management and High Technologies], 2009, no. 2 (6), pp. 83–87.

20. Ancheyta J. *Modeling and Simulation of Catalytic Reactors for Petroleum Refining*. Wiley, 2011. 528 p.

21. Carla I. C. Pinheiro, Joana L. Fernandes, Luís Domingues et al. Fluid Catalytic Cracking (FCC) Process Modeling, Simulation, and Control. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2012, no. 51 (1), pp. 1–29.

22. McFarlane R. C., Reineman R.C., Bartee J., Georgakis C. Dynamic Simulator for a Model IV Fluid Catalytic Cracking Unit. *Comp Chem. Eng.*, 1993, 17, pp. 275–300. Available at: <http://faculty.ksu.edu.sa/Emad.Ali/Pages/SimulinkModule.aspx> (accessed 5 January 2014).

23. Pashayeva B. Mathematical model of the fluid catalytic cracking for work in testing control systems for the cracking plant. *Problems of Cybernetics and Informatics: The Third International Conference*, September 6–8, 2010, Baku, Azerbaijan. Baku, 2010, vol. 1, pp. 328–331.

УДК 621.373.8

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА
ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МИКРОВИБРАЦИЙ
ПО СПЕКТРУ ЛАЗЕРНОГО АВТОДИННОГО СИГНАЛА**

Статья поступила в редакцию 06.02.2014, в окончательном варианте 18.02.2014.

Усанов Дмитрий Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 410012, Российская Федерация, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, e-mail: usanovDA@info.sgu.ru

Скрипаль Анатолий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 410012, Российская Федерация, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, e-mail: skripalav@info.sgu.ru

Астахов Елисей Игоревич, аспирант, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 410007, г. Саратов, ул. Днепропетровская, д. 16, кв. 143, e-mail: elisey.astakhov@gmail.com

В статье приведены результаты математического обоснования метода измерения амплитуды микровибраций отражателя в оптической гомодинной системе, включающей полупроводниковый лазерный автодин. Выполнено моделирование формы и низкочастотного спектра автодинного сигнала при различных уровнях оптической обратной связи (ООС). Проанализирован характер влияния уровня внешней ООС на амплитуды спектральных составляющих автодинного сигнала вибраций. Авторами выполнен анализ существующих методов определения амплитуды вибраций по низкочастотному спектру интерференционного сигнала. В результате анализа сделан вывод, что известные методы анализа вибраций, основанные на разложении интерференционного сигнала в ряд по функциям Бесселя, имеют ряд ограничений. Для определения амплитуд микровибраций предложен метод, основанный на одновременном разложении автодинного сигнала в ряды Фурье и Бесселя. Показаны преимущества этого метода перед существующими. Авторами получены выражения, определяющие однозначное решение для любых значений амплитуды колебаний внешнего отражателя. Это решение не зависит от стационарного набега фазы автодинного сигнала.

Ключевые слова: спектральный анализ, лазерная система, автодинный сигнал, амплитуда микровибраций, интерференционный сигнал, спектр колебаний, внешняя оптическая обратная связь, компьютерное моделирование

**MATHEMATICAL SUBSTANTIATION OF THE METHOD
OF MICROVIBRATIONS PARAMETERS MEASURING
BY LASER AUTODYNE SIGNAL SPECTRUM**

Usanov Dmitriy A., D.Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department, Saratov State University named after N.G. Chernyshevsky, 83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russian Federation, e-mail: usanovDA@info.sgu.ru

Skripal Anatoliy V., D.Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department, Saratov State University named after N.G. Chernyshevsky, 83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russian Federation, e-mail: skripalav@info.sgu.ru

Astakhov Elisey I., post-graduate student, Saratov State University named after N.G. Chernyshevsky, 83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russian Federation, e-mail: elisey.astakhov@gmail.com

The results of mathematical justification of the method of measuring of microvibrations amplitude of the reflector in the optical homodyne system including the semiconductor laser autodyne have been presented in the paper. The modeling of the shape and the low-frequency spectrum of autodyne signal at different levels of optical feedback has been carried out. The nature of the influence of the level of external optical feedback on the amplitude of the spectral components of the autodyne signal of vibration has been analyzed. The analysis of existing methods for determining the amplitude of the vibrations on the low-frequency spectrum of the interference signal has been carried out by the authors. As a result of the analysis it has been concluded that the known methods of the vibration analysis based on the expansion of the interference signal in the series of Bessel functions have several limitations. To determine the amplitudes of microvibrations the method has been proposed based on the simultaneous expansion of autodyne signal in Fourier and Bessel series. The advantages of this method over existing ones have been shown. The authors have obtained expressions for the single-valued solution for all values of the vibration amplitude of the external reflector. This decision does not depend on the stationary phase shift of autodyne signal.

Keywords: spectral analysis, laser system, autodyne signal, amplitude of microvibrations, interference signal, the vibration spectrum, external optical feedback, computer simulation

Введение. На современном этапе развития науки и техники актуальными становятся вопросы разработки технологий, основанных на использовании микровибраций и микроперемещений. В частности, в сфере медицины к таким технологиям относятся разработки методов определения колебаний барабанной перепонки [6], глазного яблока [11], стенок сосудистой системы человека [10]. В промышленности актуальным является определение параметров движения элементов изделий микросистемной техники, датчиков давления, акселерометров [1, 7, 9]. Отдельным направлением является дистанционный съем с помощью лазерного луча звуковой информации в помещениях с помощью отражений от колеблющихся поверхностей стекол в окнах.

Для исследования микровибраций в настоящее время все большее применение находят методы лазерной диагностики. Среди них одним из наиболее чувствительных является метод лазерной интерферометрии, основанный на измерении фазы отраженного лазерного излучения.

Одной из задач лазерной интерферометрии является восстановление функции, описывающей движение объекта, по спектру интерференционного сигнала. В интерференционной системе с развязкой от источника излучения решение такой задачи удалось осуществить с использованием одновременных разложений продетектированного сигнала в ряды Фурье и Бесселя [8, 25].

Особую актуальность развитие лазерной интерферометрии для анализа параметров движений объекта приобрело в связи с применением для измерений автодинных систем. Автодинная система обычно включает в себя полупроводниковый лазер и внешний отражатель – иными словами, сочетает в одном устройстве функции генератора и детектора фазы электромагнитной волны. Возвращенная внешним отражателем в резонатор лазера волна приводит к изменению концентрации носителей заряда в активной среде и показателя преломления активной области. В свою очередь это вызывает изменение оптической частоты генерации. Поэтому автодинный сигнал отличается от интерференционного сигнала, формируемого отражателем в интерференционной системе с развязкой от источника излучения [7]. По сравнению с интерференционными системами автодинные измерительные системы, созданные на основе такого эффекта, обладают уменьшенными габаритами, весом, низким энергопотреблением [4, 14, 16, 19–21].

Целью данной работы было математическое обоснование применения лазерных автодинных систем для бесконтактного определения амплитуд микровибраций вне зависимости от расстояния лазерной системы до вибрирующего отражателя, основанное на анализе соотношения спектральных составляющих низкочастотного спектра автодинной системы.

Лазерные интерференционные методы измерения амплитуд вибраций. Особенность интерференционных оптических систем заключается в том, что детектируемый сигнал является функцией сдвига фаз, наведенного разностью оптических путей в плечах интерференционной системы. На рис. 1 приведена схема лазерного интерферометра Майкельсона. Здесь световой поток от источника излучения («1») делится на две волны: опорную и облучающую движущийся объект. Опорная и отраженная от объекта («4») волны собираются на выходе системы и создают интерференционную картину в плоскости фотоприемника («6»). Регистрируемый сигнал в общем случае имеет достаточно сложную форму. Поэтому восстановление по нему характеристик движения объекта оказывается непростой задачей.

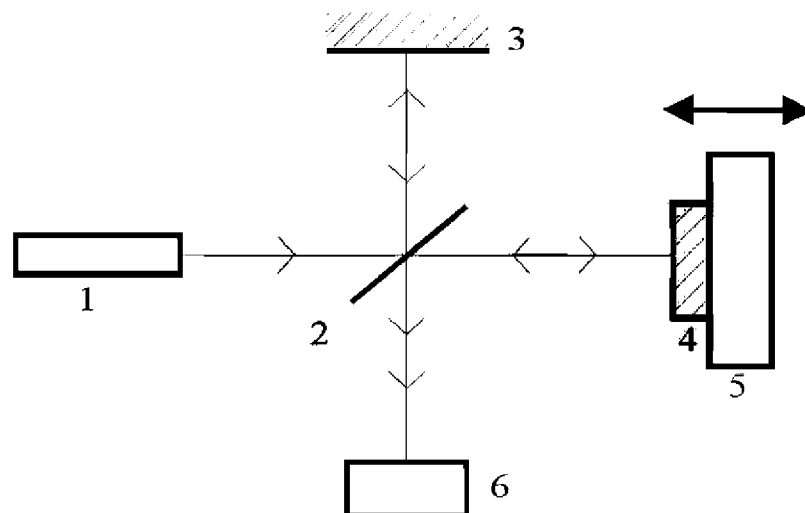


Рис. 1. Схема лазерного интерферометра Майкельсона:
 1 – источник излучения; 2 – светоделительная пластина; 3 – опорное зеркало;
 4 – объект исследований; 5 – пьезокерамика; 6 – экран

Проанализируем интерференционный сигнал в схеме интерферометра Майкельсона. В плоскости фотодетектора формируется интерференционная картина, описываемая формулой

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} P(x, y, t), \quad (1)$$

где I_1 и I_2 – интенсивности света в предметном и опорном каналах соответственно; $P(x, y, t)$ представляет нормированную переменную составляющую интерференционного сигнала вида

$$P(t) = \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{\lambda} f(t)\right), \quad (2)$$

где t – время; θ – фаза сигнала; $f(t)$ – функция, характеризующая продольные движения объекта. Для гармонических колебаний она имеет вид:

$$f(t) = \xi \sin(\Omega \cdot t + \varepsilon), \quad (3)$$

где ξ и Ω – амплитуда и круговая частота колебаний внешнего отражателя; ε – начальная фаза.

Мощность излучения $P(t)$ протектированного сигнала в интерференционной системе, одно из плеч которой совершает гармонические колебания, может быть представлена в виде разложения в ряд по функциям Бесселя:

$$\begin{aligned}
 P(t) = & \cos\theta J_0(\sigma) + 2 \cos\theta \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\sigma) \cos[2n\omega t + \varepsilon] - \\
 & - 2 \sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(\sigma) \cos[(2n-1)\omega t + \varepsilon],
 \end{aligned} \quad (4)$$

где n – номер гармоники спектральной составляющей выходного сигнала детектора.

Как видно из выражения (4), протектированный сигнал состоит из постоянной компоненты $\cos\theta \cdot J_0(\sigma)$, гармоники на основной частоте и составляющих на более высоких гармониках по отношению к основной частоте.

Для гармонически колеблющегося объекта амплитуды спектральных составляющих выходного сигнала детектора автодинной системы прямо пропорциональны функциям Бесселя $J_{2n}(\sigma)$, $J_{2n-1}(\sigma)$ и связаны с ними соотношениями:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2J_1(\sigma) \sin \theta, & S_2 &= 2J_2(\sigma) \cos \theta, \\ S_3 &= 2J_3(\sigma) \sin \theta, & S_4 &= 2J_4(\sigma) \cos \theta, \\ S_{2n-1} &= 2J_{2n-1}(\sigma) \sin \theta, & S_{2n} &= 2J_{2n}(\sigma) \cos \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

С ростом амплитуды колебаний объекта ξ наблюдается обогащение спектра протектированного сигнала, причем амплитуда гармоники с максимальной амплитудой S_{\max} сдвигается в сторону больших значений n .

Подходы к анализу данных в существующих интерференционных методах измерения амплитуд вибраций. В основу большинства лазерных интерференционных методов измерения амплитуды синусоидальных колебаний ξ положена прямо пропорциональная зависимость, связывающая амплитуды спектральных составляющих выходного сигнала детектора с функциями Бесселя соответствующих порядков $J_n\left(\frac{4\pi}{\lambda}\xi\right)$. Благодаря указанной зависимости можно использовать закономерности, присущие функциям Бесселя [3,15], для обработки интерференционного сигнала.

В работе [22] представлен « $J_0(\text{null})$ » метод определения амплитуды вибраций. Этот метод основан на обращении в нуль постоянной компоненты разложения сигнала детектора в ряд по функциям Бесселя, пропорциональной J_0 – функции Бесселя нулевого порядка, при известных значениях ее аргумента. Обращение в нуль функции J_0 соответствует исчезновению интерференционной картины, наблюдаемой невооруженным глазом, что соответствует сдвигу фазы на 2,405 радиан. Метод « $J_0(\text{null})$ » не пригоден для определения амплитуд вибраций в широком диапазоне их значений, так как он позволяет зафиксировать лишь такие значения разности фаз, которые кратны величине в 2,405 радиан. Однако, несмотря на указанное ограничение, обсуждаемый способ определения амплитуды вибраций можно использовать в лабораторных методах – например, для получения калибровочной зависимости амплитуды колебаний пьезокерамики от приложенного напряжения.

« $J_n(n)$ »-метод, описанный в [12], аналогичен « $J_0(\text{null})$ »-методу с той лишь разницей, что в нем регистрируют исчезновение n -ой составляющей в спектре сигнала. В « J_1/J_2 »-методе [17] амплитуду гармонических колебаний определяют из отношения спектральных составляющих на основной и удвоенной частотах, причем для расчета выбирают максимальные значения этих составляющих, путем изменения стационарного набега фазы в интерферометре.

Метод « J_1/J_3 » [17] аналогичен « J_1/J_2 »-методу. Различие состоит в том, что измеряют значения составляющих спектра фотодетектора на основной и утроенной частотах, при этом в « J_1/J_3 »-методе не требуется знание стационарного набега фазы. По оценке авторов работы [24], минимальное значение детектируемой величины амплитуды вибраций составляет порядка одной сотой длины волны зондирующего лазерного излучения.

Общими недостатками вышеописанных методов является необходимость поддержания заданных значений стационарного набега фазы и контроля его во время эксперимента. Неоднозначность вычисления аргументов функций Бесселя приводит к ограничениям, накладываемым на диапазон измеряемых амплитуд вибраций. В частности, могут определяться лишь перемещения, не превышающие по величине $\lambda/2$, где λ – длина волны лазерного излучения.

В работе [24] использована асимптотическая связь функций Бесселя первого рода n -ого и $(n+2)$ -ого порядков. В эксперименте измеряют две соседние составляющие спектра сигнала фотодетектора, которые пропорциональны функциям Бесселя соответствующих порядков. Данный способ определения амплитуды гармонического колебания не требует контроля величины стационарного набега фазы.

Важным шагом в разработке спектральных методов определения амплитуды колебаний отражателя явилось использование рекуррентных соотношений, связывающих функции Бесселя $(n-1), (n), (n+1)$ -ого порядков. В «самосогласованном» гомодинном методе [18] для измерений предложено использовать амплитуды трех четных или нечетных составляющих спектра интерференционного сигнала с номерами $(n-1), (n+1), (n+3)$, где $n = 2, 3, \dots$, а спектральная составляющая с $n=1$ соответствует частоте вибраций отражателя. Этот метод позволяет осуществлять контроль достоверности полученного значения амплитуды вибрации за счет проведения измерений при различных номерах n . Авторы метода предполагают, что измерения можно проводить в широком диапазоне значений амплитуды вибраций отражателя. Однако этот метод не пригоден для анализа вибраций с амплитудами, меньшими $\sim 0,3\lambda$, из-за того, что в спектре сигнала отсутствует требуемый для расчетов набор спектральных составляющих.

В [23] предлагается аналогичный «самосогласованному» методу « J_1, J_2, J_3, J_4 »-метод. В нем для вычисления амплитуды гармонического колебания используется формула, содержащая четыре последовательных номера спектральных составляющих сигнала фотодетектора.

Общим недостатком «самосогласованного» и « J_1, J_2, J_3, J_4 »-методов, по сравнению с « J_1/J_3 » и « J_1/J_2 »-методами, является на порядок большее значение минимальной детектируемой амплитуды вибраций. Кроме того, «самосогласованный» метод и « J_1, J_2, J_3, J_4 »-метод могут быть применены в диапазоне значений амплитуд вибраций, ограниченном сверху. Это связано с тем, что в эксперименте регистрируются только абсолютные значения составляющих спектра сигнала фотодетектора, а в расчетные соотношения «самосогласованного» и « J_1, J_2, J_3, J_4 »-методов должны входить эти значения с учетом их знака. Таким образом, измерения можно проводить только для амплитуд вибраций, которым соответствует один и тот же знак спектральных составляющих [2].

В [5] предложено для измерений выбирать составляющие спектра сигнала фотодетектора в окрестности спектральной составляющей, обладающей максимальным значением. Для этих спектральных составляющих установлено, что они пропорциональны функциям Бесселя с одинаковым знаком.

Снять ограничения на диапазон измеряемых амплитуд гармонических вибраций, присущих «самосогласованному» и « J_1, J_2, J_3, J_4 »-методам, позволяет «модифициро-

ванный J_1, J_2, J_3, J_4 »-метод [25]. В этом методе применена формула, аналогичная формуле « J_1, J_2, J_3, J_4 »-метода, но функции Бесселя в ней заменены на новые – синтезированные на основе разложения сигнала фотодетектора в ряды Фурье и Бесселя. Однако, как и в согласованном методе, из-за отсутствия необходимых для расчета спектральных составляющих невозможно определение амплитуд вибраций с величиной, меньшей чем $\sim 0,3\lambda$.

Формирование автодинного сигнала и его спектра при гармонических колебаниях отражателя. Отличительной особенностью лазерных автодинов, аналогично интерференционным системам, является отсутствие, начиная с величин $\geq \lambda/4$, зависимости амплитуды автодинного сигнала от величины смещения объекта. На рис. 2 изображена модель составного резонатора полупроводникового лазера с оптической обратной связью (ООС), которая использована для теоретического анализа влияния ООС на искажение интерференционного сигнала.

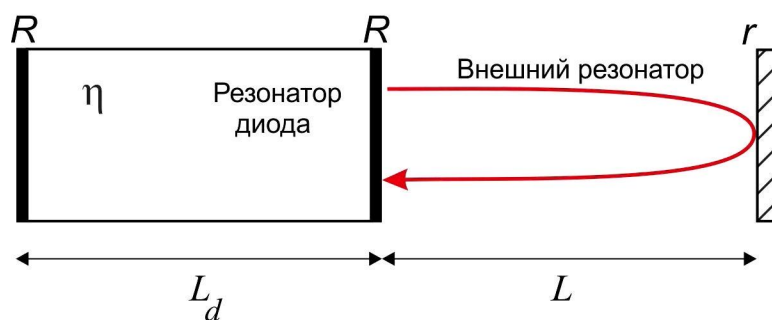


Рис. 2. Схема составного резонатора полупроводникового лазера:

L_d – длина лазерного резонатора, L – расстояние до внешнего отражателя,

r и R – соответственно коэффициенты отражения по амплитуде от внешнего зеркала и обращенной к нему грани лазера, η – показатель преломления активной области полупроводникового лазера

В случае микросмещений внешнего отражателя можно использовать переменную нормированную составляющую автодинного сигнала в виде:

$$P = \cos(\omega(t) \cdot \tau(t)), \quad (6)$$

где $\tau(t)$ – время обхода лазерным излучением расстояния L , изменяющегося при движении внешнего отражателя; $\omega(t)$ – частота излучения полупроводникового лазера, для которой можно записать фазовое уравнение в виде [7]:

$$\omega_0 \tau = \omega \tau + C \cdot \sin(\omega \tau + \psi), \quad (7)$$

где C – уровень внешней ООС.

В случае движения объекта по гармоническому закону время обхода лазерным излучением внешнего резонатора изменяется по закону:

$$\tau(t) = \tau_0 + \tau_a \cdot \sin(\Omega t + \varepsilon), \quad (8)$$

где $\tau_0 = 2L/c$ – время обхода лазерным излучением внешнего резонатора с неподвижным отражателем; $\tau_a = 2\xi/c$ – амплитудное значение изменения времени обхода; c – скорость света.

Обладая высоким коэффициентом усиления и малой добротностью, полупроводниковый лазерный автодин весьма чувствителен к изменению уровня внешней ООС. Как видно из приведенных на рис. 3 примеров автодинных сигналов, с увеличением уровня внешней

ООС переменная составляющая автодинного сигнала искажается относительно интерференционного сигнала тем больше, чем больше уровень ООС.

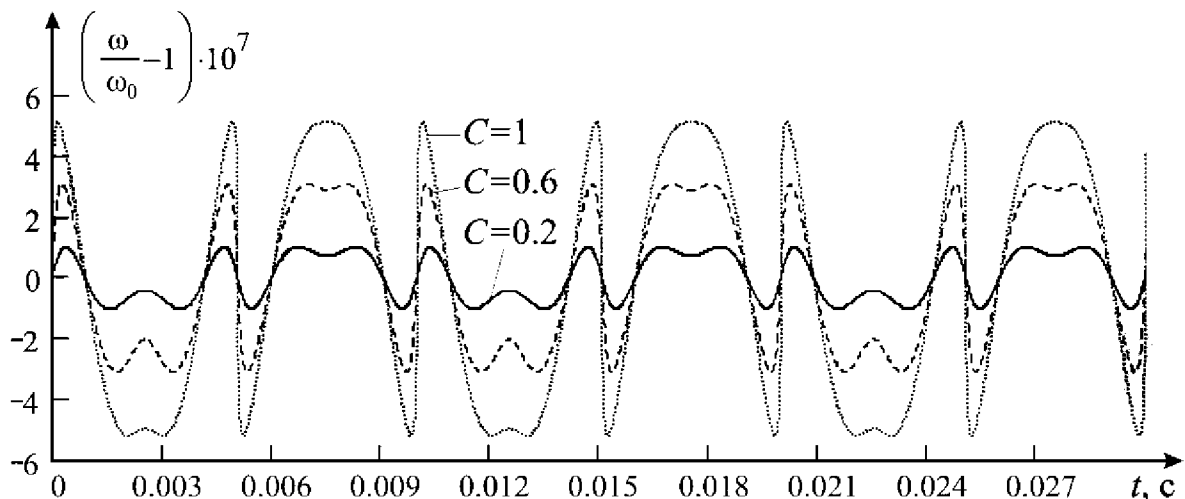


Рис. 3. Зависимость приведенной частоты излучения лазерного диода с внешней ООС для ее различных значений

На рис. 4 приведены результаты расчета спектров автодинных сигналов для значений внешней ООС $C \ll 1$ и $C = 0,6$ при гармонических колебаниях внешнего отражателя с амплитудой $\xi = 300$ нм.

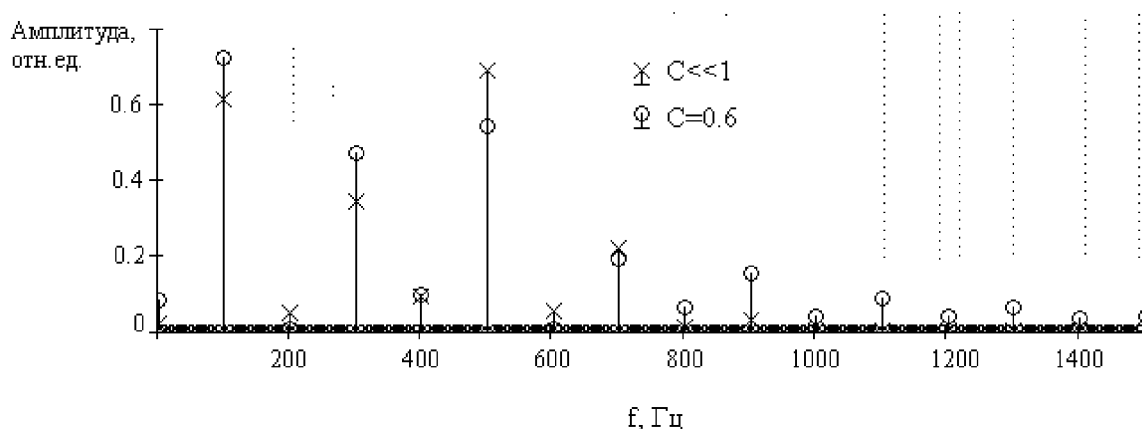


Рис. 4. Спектры автодинных сигналов для значений внешней ООС $C = 0,6$ и $C \ll 1$

Из результатов проведенного моделирования видно, что с увеличением уровня внешней ООС спектр переменной составляющей автодинного сигнала искажается тем сильнее, чем выше уровень ООС.

Определение амплитуды колебаний внешнего отражателя по набору гармоник спектра автодинного сигнала. Как уже было отмечено ранее, амплитуда колебаний внешнего отражателя может быть определена по спектру интерференционного сигнала – в частности, при использовании набора спектральных гармоник низшего порядка. С учетом современных методов обработки нелинейных сигналов представляет интерес рассмотрение

метода, основанного на одновременном разложении автодинного сигнала в ряды Фурье и Бесселя.

При малом уровне обратной связи, характеризуемом величиной $C \ll 1$, зависимость фазы излучения лазерного диода от набега фазы волны во внешнем резонаторе лазера с ООС становится линейной. Следовательно, при $C \ll 1$ изменением частоты излучения полупроводникового лазера во времени можно пренебречь. В этом случае соотношение (7) может быть представлено в виде

$$\omega(t) \cdot \tau(t) = \omega_0 \cdot \tau(t) = \omega_0 \cdot \tau_0 + \omega_0 \tau_a \cdot \sin(\Omega t + \varepsilon). \quad (9)$$

С учетом (9) соотношение (6) для нормированной переменной составляющей автодинного сигнала сводится к виду

$$P(t) = \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{\lambda} f(t)\right), \quad (10)$$

где $\theta = \omega_0 \cdot \tau_0$ – стационарный набег фазы.

Если переменную нормированную составляющую автодинного сигнала при гармонических вибрациях отражателя $P(t)$ представить в виде разложения в ряд по функциям Бесселя (4) и в ряд Фурье

$$P(t) = 1/2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} \cos(2n\Omega t) - b_{2n} \sin(2n\Omega t)) - \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} \cos((2n-1)\Omega t) - b_{2n-1} \sin((2n-1)\Omega t)), \quad (11)$$

то можно ввести спектральные коэффициенты c_n следующим образом:

$$c_{2n} = 2J_{2n}(\sigma) \cos \theta = \begin{cases} a_{2n} / \cos(2n\varepsilon), & |a_{2n}| > |b_{2n}|, \\ b_{2n} / \sin(2n\varepsilon), & |a_{2n}| < |b_{2n}|, \end{cases} \quad (12)$$

для четных номеров $2n$ и

$$c_{2n-1} = 2J_{2n-1}(\sigma) \sin \theta = \begin{cases} -a_{2n-1} / \sin((2n-1)\varepsilon), & |a_{2n-1}| > |b_{2n-1}|, \\ b_{2n-1} / \cos((2n-1)\varepsilon), & |a_{2n-1}| < |b_{2n-1}|, \end{cases} \quad (13)$$

для нечетных номеров $2n-1$. Коэффициенты c_{2n} и c_{2n-1} пропорциональны четным и нечетным спектральным составляющим сигнала соответственно. В (11), (12), (13) a_n и b_n – коэффициенты разложения в ряд Фурье. Значение ε при использовании коэффициентов a_n и b_n

с четными номерами находится по формуле $\varepsilon = \frac{1}{2n} \operatorname{arctg}(b_{2n}/a_{2n})$, а при использовании коэффициентов a_n и b_n с нечетными номерами – из соотношения $\varepsilon = \frac{1}{2n-1} \operatorname{arctg}(-a_{2n-1}/b_{2n-1})$.

Отметим, что спектральные коэффициенты c_n могут иметь как положительное, так и отрицательное значение в зависимости от величин σ и θ . Используя дважды рекуррентную связь по двум предыдущим членам ряда:

$$J_{n+1}(\sigma) = \frac{2n}{\sigma} J_n(\sigma) - J_{n-1}(\sigma) \quad (14)$$

и формулы (12), (13) для спектральных коэффициентов c_{2n-1} и c_{2n} , получим выражения для определения амплитуды вибраций отражателя по трем или четырем соседним гармоникам спектра автодинного сигнала:

$$\xi^2 = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \frac{n(n+1)(n+2)c_{n+1}(\sigma)}{(n+2)c_{n-1}(\sigma) + 2(n+1)c_{n+1}(\sigma) + nc_{n+3}(\sigma)}, \quad (15)$$

$$\xi^2 = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \frac{6(c_n + c_{n+1})}{(c_n + c_{n+2})(c_{n-1} + c_{n+1})}. \quad (16)$$

Выражения (15) и (16) имеют однозначное решение для любых значений амплитуды колебаний внешнего отражателя, которое не зависит от стационарного набега фазы автодинного сигнала θ . Это делает удобным применение данного метода в случае, если диапазон возможных значений искомой амплитуды вибраций не известен.

Расчет амплитуды колебаний отражателя проводится по всем возможным сочетаниям гармоник, наблюдаемых в спектре, амплитуда которых превышает величину 10 % от максимальной амплитуды гармоники в спектре. Малое значение величины разброса будет свидетельствовать о гармоничности колебаний внешнего отражателя и низком уровне ООС в автодинной системе.

Таким образом, предложенный метод измерений, в основе которого лежит сочетание результатов измерений автодинного сигнала и математических методов его обработки, открывает новые возможности для диагностики амплитуды микровибраций без необходимости определения фазы отраженного лазерного излучения и расстояния до отражателя. Это позволяет реализовать так называемый «абсолютный» метод измерения амплитуд вибраций.

Список литературы

1. Артюшенко В. М. Экспериментальное исследование параметров спектра доплеровского сигнала, отраженного от протяженного объекта / В. М. Артюшенко, В. И. Воловач // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. – 2012. – № 3. – С. 17–24.
2. Вагарин В. А. Об ограничениях в применении спектрального метода определения амплитуды вибраций / В. А. Вагарин, А. В. Скрипаль, Д. А. Усанов // Автометрия. – 1994. – № 1. – С. 89–90.
3. Грей Э. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике : пер. с англ. / Э. Грей, Г. Б. Мэтьюз. – Москва : Иностранная литература, 1949. – 386 с.
4. Маргин А. В. Доплеровский измеритель скорости на основе инжекционного лазера / А. В. Маргин // ЖТФ. – 1994. – Т. 64, вып. 1. – С. 184–189.
5. Усанов Д. А. Определение амплитуды колебаний оптическим гомодинным методом по высшим гармоникам / Д. А. Усанов, А. В. Скрипаль, В. А. Вагарин // ПТЭ. – 1994. – № 6. – С. 162–165.
6. Усанов Д. А. Лазерные автодинные измерения параметров движений барабанной перепонки / Д. А. Усанов, О. В. Мареев, А. В. Скрипаль, Г. О. Мареев // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, № 1. – С. 8–21.
7. Усанов Д. А. Измерение микро- и нановибраций и перемещений с использованием полупроводниковых лазерных автодинов / Д. А. Усанов, А. В. Скрипаль // Квантовая электроника. – 2011. – Т. 41 (1). – С. 86–94.
8. Усанов Д. А. Нахождение амплитуды нановибраций по двум спектральным составляющим полупроводникового лазерного автодина / Д. А. Усанов, А. В. Скрипаль, А. С. Камышанский // Письма в ЖТФ. – 2006. – Т. 32, вып. 17. – С. 42–49.
9. Усанов Д. А. Определение ускорения при микро- и наносмещениях объекта по автодинному сигналу полупроводникового лазера с учетом влияния внешней оптической обратной связи / Д. А. Усанов, А. В. Скрипаль, Е. О. Кашавцев, С. Ю. Добдин // ЖТФ. – 2013. – Т. 83, вып. 7. – С. 156–158.
10. Усанов Д. А. Определение формы пульсовой волны по сигналу полупроводникового лазерного автодина / Д. А. Усанов, А. В. Скрипаль, Е. О. Кашавцев // Письма в ЖТФ. – 2013. – Т. 39, вып. 5. – С. 82–87.

11. Усанов Д. А. Метод измерения внутриглазного давления с помощью полупроводникового лазерного автодина / Д. А. Усанов, А. В. Скрипаль, Т. Б. Усанова, С. Ю. Добдин // Письма в ЖТФ. – 2012. – Т. 38, вып. 3. – С. 69–74.
12. Defferari H. A. Vibration Displacement and Mode-Shape Measurement by a Laser Interferometer / H. A. Defferari, R. A. Darby, F. A. Andrews // J. Acoust. Soc. Am. – 1967. – Vol. 42, № 5. – P. 982–997.
13. Giuliani G. Laser diode self-mixing technique for sensing application / G. Giuliani, M. Norgia, S. Donati and T. Bosch // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2002. – Vol. 4. – P. 283–294.
14. Jentik H. W. Small laser Doppler velocimeter based on the self-mixing effect in a diode laser / H. W. Jentik, F. F. de Mul, H. E. Suichies, J. G. Aarnoudse, J. Greve // Appl. Opt. – 1988. – Vol. 27. – P. 379–385.
15. Jin W. Direct readout of dynamic phase changes in a fiber-optic homodyne interferometer / W. Jin, D. Uttamchandani, B. Culshaw // Appl. Opt. – 1990. – Vol. 31, № 34. – P. 7253–7258.
16. Mocker H. W. High accuracy laser Doppler velocimeter using stable long wavelength semiconductor lasers / H. W. Mocker, P. E. Bjork // Appl. Opt. – 1989. – Vol. 28. – P. 4914–4919.
17. Ohtsuka Y. Dynamic measurements of small displacements by laser interferometry / Y. Ohtsuka // Trans. Inst. Measure. Control. – 1982. – Vol. 4. – P. 115–124.
18. Pernick B. J. Self-Consistent and Direct Reading Laser Homodyne Measurement Technique / B. J. Pernick // Appl. Opt. – 1973. – Vol. 12, № 3. – P. 607–610.
19. Seko A. Self-quenching in semiconductor lasers and its applications in optical memory readout / A. Seko, Y. Mitsuhashi // Appl. Phys. – 1975. – Vol. 27, № 3. – P. 140–141.
20. Shimizu E. T. Directional discrimination in the self-mixing type laser Doppler velocimeter / E. T. Shimizu // Appl. Opt. – 1987. – Vol. 26. – P. 4541–4544.
21. Shinohara S. Laser Doppler velocimeter using the self-mixing effect of a semiconductor laser diode / S. Shinohara, A. Mochizuki, H. Yoshida, M. Sumi // Appl. Opt. – 1986. – Vol. 25. – P. 1417–1419.
22. Sudarshanam V. S. Linear readout of dynamic phase change in a fiber-optic homodyne interferometer / V. S. Sudarshanam, K. Srinivasan // Opt. Lett. – 1989. – Vol. 14, № 2. – P. 140–142.
23. Sudarshanam V. S. Universal phase calibrating technique for a fiber-optic homodyne interferometer / V. S. Sudarshanam, K. Srivasan // Opt. Lett. – 1989. – Vol. 14. – P. 1287–1289.
24. Vikram C. S. Simple spectrum analysis in laser Doppler studies of sinusoidal vibrations / C. S. Vikram, T. E. McDevitt // Opt. Eng. – 1989. – Vol. 28. – P. 922–925.
25. Wei Jin. Modified J1...J4 method for linear readout of dynamic phase changes in a fiber-optic homodyne interferometer / Wei Jin, Li Ming Zang, Deepak Uttamchandani, Brian Culshaw // Appl. Opt. – 1991. – Vol. 30, № 31. – P. 4496–4499.

References

1. Artyushenko V. M., Volovach V. I. Eksperimentalnoe issledovanie parametrov spektra doplerovskogo signala, otrazhennogo ot protyazhennogo obekta [Experimental research of parameters of Doppler signal spectrum reflected from the distanced object]. *Prikaspiyskiy zhurnal: upravlenie i vysokie tekhnologii* [Caspian Journal: Management and High Technologies], 2012, no. 3, pp. 17–24.
2. Vagarin V. A., Skripal A. V., Usanov D. A. Ob ogranicheniyah v primeneniі spektralnogo metoda opredeleniya amplitudy vibratsiy [On the restrictions in application of spectral method of vibration amplitude determination]. *Avtometriya* [Autometry], 1994, no. 1, pp. 89–90.
3. Grey E., Metyuz G. B. *Funktsii Besselya i ih prilozheniya k fizike i mekhanike* [Bessel functions and their supplements to physics and mechanics]. Moscow, Inostrannaya literature, 1949. 386 p.
4. Margin A. V. Doplerovskij izmeritel skorosti na osnove inzhekcionnogo lazera [Doppler rate meter on the basis of injector laser]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Journal of Technical Physics], 1994, vol. 64, issue 1, pp. 184–189.
5. Usanov D. A., Skripal A. V., Vagarin V. A. Opredelenie amplitudy kolebaniy opticheskim gomodinnyim metodom po vysshim garmonikam [Determination of vibration amplitude by optical homodyne method of higher harmonics]. *Pravila tekhnicheskoy ekspluatatsii* [Rules of Technical Exploitation], 1994, no. 6, pp. 162–165.
6. Usanov D. A., Mareev O. V., Skripal A. V., Mareev G. O. Lazernye avtodinnye izmereniya parametrov dvizheniy barabannoy pereponki [Laser autodyne measurements of parameters of ear-drum movements]. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics], 2012, vol. 16, no. 1, pp. 8–21.

7. Usanov D. A., Skripal A. V. Izmerenie mikro- i nanovibratsiy i peremeshcheniy s ispolzovaniem poluprovodnikovyykh lazernykh avtodinov [Measurement of micro- and nanovibrations and displacements using semiconductor laser autodynes]. *Kvantovaya elektronika* [Quantum Electronics], 2011, vol. 41 (1). pp. 86–94.
8. Usanov D. A., Skripal A. V., Kamyshevskiy A. S. Nakhozhdenie amplitudy nanovibratsiy po dvum spektralnym sostavlyayushchim poluprovodnikovogo lazernogo avtodina [Finding the amplitude of nanovibrations by two spectral components of a semiconductor laser autodyne]. *Pisma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Technical Physics Letters], 2006, vol. 32, issue 17, pp. 42–49.
9. Usanov D. A., Skripal A. V., Kashchavtsev Ye. O., Dobdin S. Yu. Opredelenie uskoreniya pri mikro- i nanosmeshcheniyakh obekta po avtodinnomu signalu poluprovodnikovogo lazera s uchetoм vliyaniya vneshney opticheskoy obratnoy svyazi [Determination of acceleration under micro- and nanodisplacements of object by autodyne signal semiconductor laser with the influence of external optical feedback]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Journal of Technical Physics], 2013, vol. 83, issue 7, pp. 156–158.
10. Usanov D. A., Skripal A. V., Kashchavtsev Ye. O. Opredelenie formy pulsovoy volny po signalu poluprovodnikovogo lazernogo avtodina [Determination of the shape of pulse wave by the signal of semiconductor laser autodyne]. *Pisma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Technical Physics Letters], 2013, vol. 39, issue 5, pp. 82–87.
11. Usanov D. A., Skripal A. V., Usanova T.B., Dobdin S. Yu. Metod izmereniya vnutriglaznogo davleniya s pomoshchyu poluprovodnikovogo lazernogo avtodina [Method for measuring intraocular pressure using a semiconductor laser autodyne]. *Pisma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Technical Physics Letters], 2012, vol. 38, issue 3, pp. 69–74.
12. Defferari H. A., Darby R. A., Andrews F. A. Vibration Displacement and Mode-Shape Measurement by a Laser Interferometer. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1967, vol. 42, no. 5, pp. 982–997.
13. Giuliani G., Norgia M., Donati S. and Bosch T. Laser diode self-mixing technique for sensing application. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 2002, vol. 4, pp. 283–294.
14. Jentik H. W., de Mul F. F., Suichies H. E., Aarnoudse J. G., Greve J. Small laser Doppler velocimeter based on the self-mixing effect in a diode laser. *Appl. Opt.*, 1988, vol. 27, pp. 379–385.
15. Jin W., Uttamchandani D., Culshaw B. Direct readout of dynamic phase changes in a fiber-optic homodyne interferometer. *Appl. Opt.*, 1990, vol. 31, no. 34, pp. 7253–7258.
16. Mocker H. W., Bjork P. E. High accuracy laser Doppler velocimeter using stable long wavelength semiconductor lasers. *Appl. Opt.*, 1989, vol. 28, pp. 4914–4919.
17. Ohtsuka Y. Dynamic measurements of small displacements by laser interferometry. *Trans. Inst. Measure. Control.*, 1982, vol. 4, pp. 115–124.
18. Pernick B. J. Self-Consistent and Direct Reading Laser Homodyne Measurement Technique. *Appl. Opt.*, 1973, vol. 12, no. 3, pp. 607–610.
19. Seko A., Mitsuhashi Y. Self-quenching in semiconductor lasers and its applications in optical memory readout. *Appl. Phys.*, 1975, vol. 27, no. 3, pp. 140–141.
20. Shimizu E. T. Directional discrimination in the self-mixing type laser Doppler velocimeter. *Appl. Opt.*, 1987, vol. 26, pp. 4541–4544.
21. Shinohara S., Mochizuki A., Yoshida H., Sumi M. Laser Doppler velocimeter using the self-mixing effect of a semiconductor laser diode. *Appl. Opt.*, 1986, vol. 25, pp. 1417–1419.
22. Sudarshanam V. S., Srinivasan K. Linear readout of dynamic phase change in a fiber-optic homodyne interferometer. *Opt. Lett.*, 1989, vol. 14, no. 2, pp. 140–142.
23. Sudarshanam V. S., Srinivasan K. Universal phase calibrating technique for a fiber-optic homodyne interferometer. *Opt. Lett.*, 1989, vol. 14, pp. 1287–1289.
24. Vikram C. S., McDevitt T.E. Simple spectrum analysis in laser Doppler studies of sinusoidal vibrations. *Opt. Eng.*, 1989, vol. 28, pp. 922–925.
25. Wei Jin, Li Ming Zang, Deepak Uttamchandani, Brian Culshaw. Modified J1...J4 method for linear readout of dynamic phase changes in a fiber-optic homodyne interferometer. *Appl. Opt.*, 1991, vol. 30, no. 31, pp. 4496–4499.