СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 004.021

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ МЕТОДОМ «CUT-GLUE» АППРОКСИМАЦИИ[1]

Статья поступила в редакцию 27.11.2018, в окончательном варианте – 27.12.2018.

Нейдорф Рудольф Анатольевич, Донской государственный технический университет, 344000, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

доктор технических наук, профессор, e-mal: ranpro@mail.ru,

Полях Виктор Васильевич, Донской государственный технический университет, 344000, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

аспирант, e-mal: silvervpolyah@gmail.com

Обязательным этапом решения сложных инженерных задач является построение математических моделей, разрабатываемых технических систем. При экспериментальном построении моделей таких объектов применяется аппроксимация зависимостей выходных данных от входных. При существенной нелинейности таких зависимостей задача аппроксимации становится трудоемкой. Кроме того, при этом неизбежны значительные погрешности. Метод «Cut-Glue» аппроксимации основан на аналитическом мультипликативном «вырезании» фрагментов данных, их аппроксимации аналитическими функциями и аддитивном «склеивании» в единую аналитическую функцию. Общая точность описания объекта этой функцией определяется локальными погрешностями аппроксимации каждого фрагмента. Поэтому обеспечение точности описания каждого фрагмента является важнейшим этапом метода. Экспоненциальная зависимость размерности задачи от размерности объекта и числа фрагментов делает актуальной структурно-параметрическую минимизацию математической модели каждого фрагмента.

Ключевые слова: аппроксимация, структурно-параметрическая оптимизация, эволюционно-генетический алгоритм, комбинаторика, cut-glue

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THREE DIMENSIONAL ESSENTIALLY NONLINEAR DEPENDENCE ON EXPERIMENTAL DATA BY CUT-GLUE APPROXIMATION METHOD

The article was received by editorial board on 27.11.2018, in the final version – 27.12.2018.

Neydorf Rudolf A., Don State Technical University, 1 Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344000, Russian Federation,

Doct. Sci. (Engineering), Professor, e-mail: ranpro@mail.ru

Poliakh Victor V., Don State Technical University, 1 Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344000, Russian Federation,

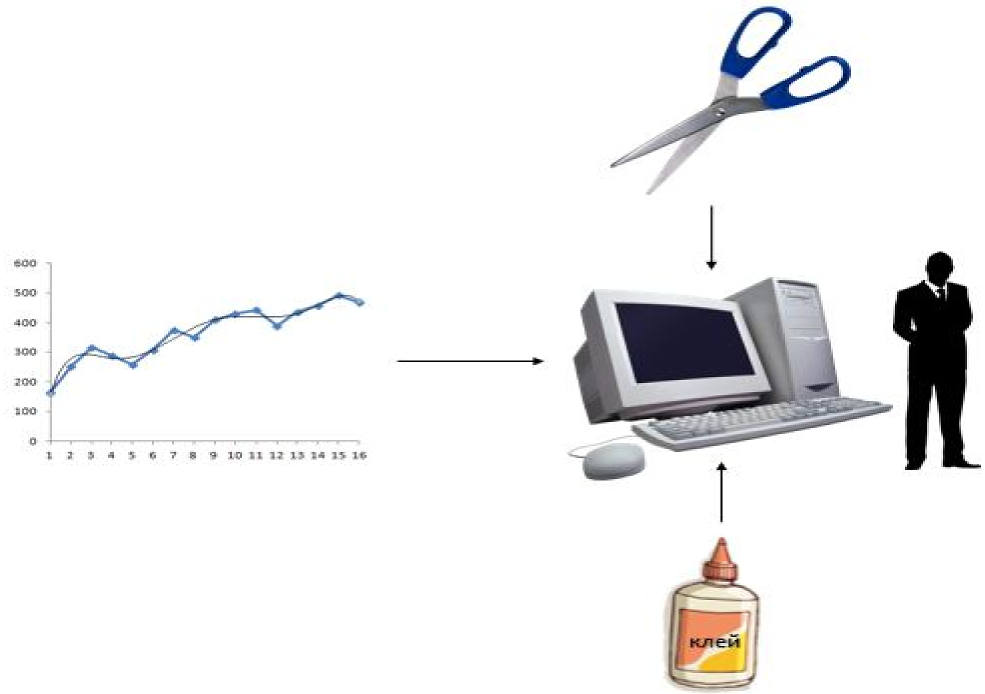
post-graduate student, e-mail: silvervpolyah@gmail.com

The obligatory stage of solving complex engineering problems is the construction of mathematical models, developed technical systems. At experimental construction of models of such objects, the approximation of dependences of the output data from input is applied. With their essential non-linearity, the approximation problem becomes time-consuming, significant errors are inevitable. The method of "Cut-Glue" approximation is based on analytical multiplicative "cutting" of data fragments, their approximation by analytical functions and additive "gluing" into a single analytic function. The overall accuracy of the object description by this function is determined by the local errors in the approximation of each fragment. Therefore, ensuring the accuracy of the description of each fragment is an important stage of the method. The exponential dependence of the dimension of the problem on the dimension of the object and the number of fragments makes the structural-parametric minimization of the mathematical model of each fragment actual.

Key words: approximation, structural-parametric optimization, evolutionary-genetic algorithm, combinatorics, cut-glue

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №18-08-01178/18 А.

Graphical annotation (Графическая аннотация)



В статье используются следующие **сокращения** терминов**: ММ** – математическая модель; **ЭД** – экспериментальные данные; **CGA** – Cut-Glue approximation; **ФЭД** – фрагмент экспериментальных данных; **ЛАФ** – локально аппроксимирующая функция; **КРА** – классический регрессионный анализ; **СП** – степенной полином; **СП УС** – степенной полином универсальной структуры; **СПО** – структурно-параметрическая оптимизация; **ПП** – полный полином.

Введение. В процессе научно-технического прогресса для большинства реальных технических и технологических объектов экспериментальное построение математических моделей (ММ) и их исследование методами компьютерного моделирования являются единственными результативными методами решения задач.

Это обусловлено тем, что из-за недостаточности априорных знаний теоретические методы исследования для таких объектов недоступны. Кроме того, при наличии существенных нелинейностей внутренних взаимосвязей входных и выходных данных зависимости для указанных объектов далеко не всегда поддаются определению известными численными методами.

Например, при моделировании аэродинамических характеристик воздухоплавательных аппаратов исследователи зачастую сталкиваются с существенными нелинейностью и неоднозначностью аэродинамических законов их собственного движения и взаимодействия с окружающей средой. Существенно нелинейными характеристиками также обладают механические производственные процессы, аппараты химической промышленности, наземные транспортные средства и т.п.

Экспериментальное построение ММ таких объектов является задачей математической обработки данных. Трудоёмкость аппроксимации таких нелинейных зависимостей очевидна и связана с появлением значительных погрешностей. Снижение погрешностей достигается за счёт применения эффективных подходов, основанных на фрагментации исходного массива экспериментальных данных (ЭД). Под эффективными подходами подразумевается следующее: кусочная аппроксимация [1, 2], методы сплайн-функций [3, 4], а также радиальных базисных функций [5, 6]. Эти подходы значительно повышают точность аппроксимации по сравнению с методами описания массива ЭД в целом (полиномиальные разложения [5–8], регрессионный анализ [9–12] и др.). Однако при этом исключаются или затрудняются возможности аналитического преобразования ММ в силу их записи в условно-логической форме.

Одним из действенных средств расширения возможностей и повышения результативности экспериментальных методов построения ММ явился метод, ориентированный на высоко формализованный подход к построению ММ существенно нелинейных объектов по ЭД проведенных на них активных экспериментов. В ряде работ, начиная с 2012 г., разрабатывался метод «Cut-Glue» аппроксимации (CGA) [3, 8, 13, 14]. Он основан на специальной мультипликативной обработке ММ отдельных участков исследуемой зависимости, достаточно точно аппроксимированных аналитическими функциями. Особенностью такой обработки является то, что ее результатом являются функции, описывающие только изолированные (на каждом участке) области их определения. При подобных свойствах этих функций, подвергшихся мультипликативной обработке, оказывается допустимым их аддитивное объединение в единую функцию, которая обладает свойствами ММ исследуемого объекта [3, 8].

Метод CGA включает в себя последовательное выполнение ряда этапов: фрагментация ЭД – разбиение массива на отдельные участки – фрагменты (ФЭД), локальная аппроксимация каждого из ФЭД некоторой функцией и следующая за ними мультипликативная обработка и аддитивное объединение этих функций в ММ исследуемого объекта [13, 14]. При этом этап локальной аппроксимации ФЭД [15, 16] является для конструируемой ММ определяющим относительно конечной количественной точности.

Однако, несмотря на довольно большое количество публикаций по затронутой теме [8, 13] и наличие работ, обосновывающих отсутствие принципиальных ограничений на размерность моделируемых нелинейных зависимостей, иллюстрировались они в основном примерами применения метода CGA для объектов не выше второго порядка. Частично это было связано с необходимостью наглядной иллюстрации преобразований и результатов моделирования. В рамках этой проблемы (аппроксимации) имеют место и математические, и технологические трудности. Поэтому подробный разбор особенностей решения трехмерной задачи и влияния размерности модели на методы решения и иллюстрацию результатов видятся актуальными. Этой теме и посвящена данная статья.

Постановка задачи исследования особенностей и приемов применения метода CGA для математического описания трехмерных фрагментов данных. Разработать и проиллюстрировать примером технологию решения задачи построения математической модели фрагмента зависимости для трехмерного нелинейного объекта, используя результаты его экспериментального исследования.

Алгоритм результативной аппроксимации трехмерных фрагментов данных в задаче CGA. Результаты собственных исследований [13–16], выполненных при разработке метода CGA, а также многочисленные исследования задачи аппроксимации ЭД [3, 8] показали, что для построения локально аппроксимирующих функций (ЛАФ), т.е. реализации этапа аппроксимации ФЭД, целесообразно использовать хорошо отработанный аппарат классического регрессионного анализа (КРА) [9, 12]. При этом фрагментарный характер аппроксимации, подразумевающий не слишком большое количество опытных данных, входящих в ЭД, приводит к целесообразности ограничиться методами полиномиальной аппроксимации. Они гарантируют как аналитичность ЛАФ, так и регулярность ее структуры. Важность последнего свойства станет ясной из дальнейшего описания задачи.

Фрагментарный характер аппроксимации массива ЭД в методе CGA означает, что количество составляющих его ФЭД может быть достаточно большим, а сложность ЛАФ для каждого ФЭД будет зависеть как от его размера по количеству данных, так и от размерности самого ЭД. Иными словами, сложность ЛАФ при аппроксимации на основании только точностного критерия может оказаться очень высокой. При объединении большого количества сложных ЛАФ в единую ММ сложность последней может оказаться недопустимо высокой. Это обстоятельство указывает на необходимость постановки и решения задачи структурно-параметрической оптимизации каждой ЛАФ, что, в свою очередь, требует регулярности их структуры для обеспечения возможности управления ее сложностью.

Степенным полиномам (СП) присуще указанное свойство в силу того, что их структура является регулярной. Она позволяет реализовать однозначные алгоритмы построения СП и их комбинаторное варьирование. Для зависимости любой размерности СП имеет каноническую структуру. Однозначность ее усложнения опирается на выдерживание четкой последовательности введения членов [18]. Ниже представлен пример СП для трехмерного фрагмента экспериментальных данных:

$$\begin{aligned}q(x_1,x_2,x_3) &= b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_{11}x_1^2+b_{12}x_1x_2+b_{13}x_1x_3+b_{22}x_2^2+b_{23}x_2x_3+\\&+b_{33}x_3^2+b_{111}x_1^3+b_{112}x_1^2x_2+b_{113}x_1^2x_3+b_{122}x_1x_2^2+b_{123}x_1x_2x_3+b_{133}x_1x_3^2+b_{222}x_2^3+\\&+b_{223}x_2^2x_3+b_{233}x_2x_3^2+b_{333}x_3^3+b_{1111}x_1^4+b_{1112}x_1^3x_2+b_{1113}x_1^3x_3+b_{1122}x_1^2x_2^2+\\&+b_{1123}x_1^2x_2x_3+b_{1133}x_1^2x_3^2+b_{1222}x_1x_2^3+b_{1223}x_1x_2^2x_3+b_{1233}x_1x_2x_3^2+b_{1333}x_1x_3^3+\\&+b_{2222}x_2^4+b_{2223}x_2^3x_3+b_{2233}x_2^2x_3^2+b_{2333}x_2x_3^3+b_{3333}x_3^4\end{aligned}, \quad (1)$$

где $b_{ijk...}$ – коэффициенты полинома *4*-й степени при *3*-й размерности моделируемой зависимости. Их индексы указывают на перемножаемые переменные. Например, b_{1123} – множитель при произведении $(x_1x_1x_2x_3)$; x_i проиндексированные независимые переменные исследуемой экспериментальной зависимости.

Алгоритм формирования СП универсальной структуры (СП УС) базируется на использовании двух циклов. Внутренние циклы обеспечивают смену факторов x_i от минимального к максимальному индексу как при введении в структуру членов одного степенного порядка, так и при переходе к более высокому порядку. Внешний цикл обеспечивает последовательное повышение порядка очередной группы членов полинома от нулевого к заданному после исчерпания комбинаторных вариантов перемножения факторов.

Такой подход и форма СП УС упрощают формальную оценку и сопоставление степенных полиномов по сложности их структур. Однако их использование для регрессионного описания ФЭД усложняет решение задачи нахождения оптимальных коэффициентов регрессии. Одним из наиболее простых и известных приемов упрощения задачи является возможность представления нелинейных членов степенных полиномов аргументами расширенного псевдолинейного факторного пространства нового вектора условно независимых переменных $\tilde{x}$ большей размерности:

$$q(\widetilde{x}) = \sum_{i=0}^{n} \widetilde{b}_i \times \widetilde{x}_i = \sum_{i=0}^{n} b_i \times x_i + \sum_{i=n+1}^{n} \hat{b}_i \times \hat{x}_i \,, \tag{2}$$

где $\widetilde{b}_i$ – коэффициенты псевдолинейного полинома $\widetilde{n}$ -й размерности, $\widetilde{x}_i$ – обобщенные аргументы исследуемой зависимости, включающие как исходные аргументы x_i, так и образованные из них псевдоаргументы $\hat{x}_i = \prod_n x_i$, которыми заменяются мультипликативные нелинейности степенного полинома.

Это позволяет производить вычисление коэффициентов регрессии рассматриваемого варианта полинома с использованием известного в линейном варианте КРА матричного уравнения

$$\widetilde{b} = (X^T X)^{-1} X^T y \,, \tag{3}$$

дающего лишь субоптимальное решение. В формуле (3) $y - N_k$ – вектор значений k-го ФЭД; X – матрица входов $\widetilde{x}_{ij}; j \in [1, N_k]$ и i – номера опытов, совпадающие с номерами псевдопеременных. Взаимозависимость части $\widetilde{x}_i$ обусловливает субоптимальность вычисляемых коэффициентов $\widetilde{b}_i$ относительно используемого в КРА критерия: метода наименьших квадратов (МНК) – этот критерий является лишь эвристическим. Поэтому при возможности решить задачу комбинаторно с успехом применяются неквадратичные критерии.

Необходимо отметить, что аппарат КРА используется в его стандартном виде и не подвергается модификации, поскольку функции получения наилучшего варианта аппроксимации осуществляются в процессе дальнейшей структурно-параметрической оптимизации (СПО). При помощи КРА решается задача параметрической субоптимизации полиномиальных коэффициентов для каждого структурного варианта степенного полинома. Задача СПО как метода решения задач первого этапа применения метода CGA к решению задачи аппроксимации фрагментированных ЭД состоит в направленном варьировании структуры аппроксимирующего степенного полинома и выборе ее оптимального или субоптимального варианта. При невысокой сложности решаемой задачи (по размерности и по порядку аппроксимирующего СП) можно использовать алгоритм прямого перебора вариантов. Если сложность задачи приводит к недопустимому времени ее решения, то необходимо применять хорошо зарекомендовавшие себя в таких случаях эвристические алгоритмы поисковой оптимизации. Поэтому авторами разработана модификация ЭГА, которая является предметно-ориентированной под задачу аппроксимации ФЭД.

Структурно-параметрическая оптимизация математической модели ФЭД. Необходимость поиска не только параметрически, но и структурно оптимального варианта аппроксимирующей функции обусловливается тем, что часто не все входящие в нее компоненты могут обеспечить требуемую точность, так как свойства некоторых нелинейных функций противоречат характеру аппроксимируемой экспериментальной зависимости. Конкретные функции, хорошо аппроксимирующие кривизну гиперповерхности ФЭД каждого отдельного фрагмента, заранее неизвестны. В связи с этим возникает задача использования универсальной структуры, формирующей аппроксимирующую функцию, которая содержит достаточное многообразие элементарных функций и состоит из их форм. Полный степенной полином наиболее отвечает этому требованию. Однако при его использовании возникают поисковые задачи. Прежде всего необходимо выявить его порядок m, с которого наступает ухудшение точности аппроксимации данных полным полиномом по сравнению с полным полиномом порядка m-1. Кроме того, необходимо организовать эффективный поиск членов ПП, повышающих точность аппроксимации.

Преимущество применения регрессионного степенного полинома для решения этой задачи состоит в том, что его структура может кодироваться регулярной математической записью типа «маска». Она отображает структуру степенного полинома n-й размерности и m-й степени в форме специально организованного цифрового кода. Такой код удобно привязать к структуре ПП, который имеет аналогичную размерность n и степень m. Исходное расположение элементов ПП отвечает описанным выше комбинаторным правилам возрастания индексов коэффициентов. Это соответствует структурно и параметрически возрастающему ряду цифровых индексов коэффициентов полинома, где простые числа 0, 1, 2 … указывают на номер мультипликативно входящего в член полинома фактора. Их сочетание задает все входящие в член факторы, а количество ненулевых чисел – порядок члена степенного полинома. Ниже приведен пример кодового описания ПП 4-го порядка для структуры 3-й размерности:

$$\begin{gathered}0,1,2,3,11,12,13,22,23,33,111,112,113,122,123,133,222,223,233,333,\\1111,1112,1122,1123,1133,1222,1223,1233,1333,2222,2223,2233,2333,3333\end{gathered} \tag{4}$$

Следует отметить, что в случае аппроксимации фрагмента, состоящего из q элементов, методами КРА возможно описание его полиномом такого порядка, число членов которого меньше числа членов исследуемого фрагмента $p < q$. В связи с этим в качестве структуры, на основе которой производится исследование, выступает ПП максимально возможного для аппроксимируемого ФЭД порядка.

При помощи варьирования входящих в исследуемый ПП членов осуществляется поиск оптимальной структуры СП для рассматриваемого ФЭД. В связи с тем, что использование *NP*-полного алгоритма полного перебора всех возможных сочетаний неполного полинома неприемлемо для исследований ФЭД большой размерности, в данной работе используется ЭГА, предметно ориентированная модификация которого разработана в качестве инструмента поискового варьирования входящих в состав полинома членов. Стоит отметить, что использование алгоритма комбинаторного полного перебора всех возможных сочетаний СП возможно лишь при небольшой размерности зависимости и небольшом порядке полинома.

Структурно-параметрическая оптимизация аппроксимирующих полиномов. Составляющая структурной оптимизации включает в себя поиск субоптимального варианта структуры, основанного на критерии, относительно которого вычисляется её сложность. Следовательно, для оценки сложности СП необходимо сформировать критерий. Стоит отметить, что это является непростой задачей, которая требует дополнительных исследований. Интуитивно понятно, что в нашем случае сложность ММ зависит от ряда дискретных составляющих, определяющих структуру полинома. В основу известных подходов к дискретной оценке сложности положено использование построенной так называемой «шкалы сложности» [17]. Исследование вопроса показало, что на настоящем этапе исследований оценка сложности структуры может опираться на шкалы двух видов:

- эвристически сконструированную, в которой количественные составляющие общей оценки сложности полинома связываются с такими его параметрами, как количество членов «символов», порядок члена и т.п., и назначаются разработчиком или экспертом;
- основанную на теоретической или экспериментальной оценке временных ресурсов τ, затрачиваемых на вычисление результирующего значения каждого члена исследуемой СП.

Математическая модель для вычисления суммарной сложности структуры СП для обоих подходов схожа и выглядит следующим образом:

$$E(P) = \sum_{i=0}^{N} e_i \times x_i \ , \tag{5}$$

где P – рассматриваемая структура СП; N – количество членов, входящих в полный СП, который включает в себя максимально возможное количество членов для описания исследуемого фрагмента; e – оценка для i-го члена, указанная в таблице 1; z – показатель вхождения или не вхождения i-го члена в структуру рассматриваемого СП. Если член входит в рассматриваемую структуру, то x_i =1, иначе x_i = 0.

Для первого подхода была эвристически сконструирована шкала, которая опирается на пример, приведенный в таблице 1 во второй строке. Шкала построена для ПП четвертого порядка двумерной зависимости. Во втором случае, отображенном в таблице 1 в третьей и четвертой строках, шкала сконструирована для ПП на основе фиксации затраченных временных ресурсов для вычисления каждого члена СП. Оценка производилась на большой выборке (>100000) с использованием ЭВМ со следующими характеристиками: ЦП Pentium(R) Dual-Core 2.10Ghz, ОЗУ 3Gb.

В качестве инструмента оценки использовались программная среда разработки Microsoft Visual Studio, а также язык программирования C#, на котором разработано средство настройки, позволяющее вычислять время для выполнения вычислительных операций каждого члена СП.

В таблице 1 во втором столбце представлены коэффициенты членов ПП 4-го порядка, в третьем столбце – эвристические оценки сложности для каждого члена ПП, в четвёртом и пятом столбце представлены время (Мс) и соответствующие ему оценки (τ-оц.) затраченных временных для членов ПП 4-го порядка.

Таблица 1 – Эвристическая и ресурсная шкалы сложности структуры полинома

№	Структура члена	Эвр. оценка	Мс	τ-оценка
1	0	0,5	310	3,1
2	1	1	310	3,1
3	2	1	310	3,1
4	3	1	310	3,1
5	11	2	375	3,75
6	12	2	375	3,75
7	13	2	375	3,75
8	22	2	375	3,75
9	23	2	375	3,75
10	33	2	375	3,75
11	111	3	415	4,15
12	112	3	415	4,15
13	113	3	415	4,15
14	122	3	415	4,15
15	123	3	415	4,15
16	133	3	415	4,15
17	222	3	415	4,15
18	223	3	415	4,15
19	233	3	415	4,15
20	333	3	415	4,15
21	1111	4	480	4,8
22	1112	4	480	4,8
23	1113	4	480	4,8
24	1122	4	480	4,8
25	1123	4	480	4,8
26	1133	4	480	4,8
27	1222	4	480	4,8
28	1223	4	480	4,8
29	1233	4	480	4,8
30	1333	4	480	4,8
31	2222	4	480	4,8
32	2223	4	480	4,8
33	2233	4	480	4,8
34	2333	4	480	4,8
35	3333	4	480	4,8

Структурно-параметрическая оптимизация математического описания фрагмента зависимости силы сопротивления всплыванию аэростата от параметров полета. В качестве примера применения предложенного подхода представлено решение задачи структурно-параметрической аппроксимации фрагмента массива ЭД, полученного при исследовании зависимости вертикальной составляющей общей силы сопротивления воздуха при сложном движении аэростата от скорости подъема v (м/с), угла его крена α (угл. град.), а также от высоты его подъема h (м). При решении задачи приняты обозначения: $v \sim x_1$; $\alpha \sim x_2$; $h \sim x_3$.

Фрагмент экспериментальных данных, который представлен слева на рисунке, содержит 36 элементов.

Полный полином 4-го порядка для 3-мерной зависимости содержит $p = 35$ членов. Поэтому предельный порядок ПП для данного фрагмента равен 4. Описание фрагмента из 36 элементов полиномом, который содержит 35 членов, не является статистически приемлемым вариантом, так как обеспечивает лишь одну из степеней свободы, что недостаточно для оценки получаемой модели. Однако нужно отметить, что зачастую варианты СП с меньшим количеством членов (б*о*льшим числом степеней свободы) лучше описывают исследуемый фрагмент, чем полный полином максимально возможного порядка для исследуемого фрагмента данных. Поэтому за основу берётся структура СП максимального порядка, так как это позволяет осуществлять поиск наилучшей точности аппроксимации варьированием входящих в неё членов (например, посредством описанных ранее комбинаторно-поискового алгоритма и поискового подхода на основе модифицированного ЭГА).

$$x_3 = 10\text{км}\quad \begin{array}{cccc} & 2{,}5 & 4 & 5 \\ 0 & -3888 & -9317 & -15497 \\ 15 & -4306 & -11054 & -17382 \\ 30 & -7618 & -20192 & -30543 \\ 45 & -8784 & -22346 & -34842 \end{array}$$

$$x_3 = 5\text{км}\quad \begin{array}{cccc} & 2{,}5 & 4 & 5 \\ 0 & -6298 & -16830 & -21244 \\ 15 & -8781 & -17290 & -32778 \\ 30 & -14289 & -35935 & -56109 \\ 45 & -15414 & -39426 & -61146 \end{array}$$

$$x_3 = 0\text{км}\quad \begin{array}{cccc} & 2{,}5 & 4 & 5 \\ 0 & -9129 & -28634 & -35481 \\ 15 & -12952 & -38359 & -52613 \\ 30 & -23153 & -59874 & -95792 \\ 45 & -25790 & -65624 & -98963 \end{array}$$

Экспериментальные данные

$\Rightarrow$

$$x_3 = 10\text{км}\quad \begin{array}{cccc} & 2{,}5 & 4 & 5 \\ 0 & -2177 & -10816 & -11781 \\ 15 & -2090 & -11989 & -18078 \\ 30 & -11184 & -20294 & -31507 \\ 45 & -7917 & -18287 & -34624 \end{array}$$

$$x_3 = 5\text{км}\quad \begin{array}{cccc} & 2{,}5 & 4 & 5 \\ 0 & -6080 & -16800 & -23170 \\ 15 & -7650 & -22260 & -35808 \\ 30 & -17120 & -35749 & -56601 \\ 45 & -15254 & -37645 & -65803 \end{array}$$

$$x_3 = 0\text{км}\quad \begin{array}{cccc} & 2{,}5 & 4 & 5 \\ 0 & -14775 & -27924 & -40079 \\ 15 & -18760 & -39113 & -60685 \\ 30 & -30837 & -58375 & -89363 \\ 45 & -31494 & -66218 & -106622 \end{array}$$

Аналитические данные

Рисунок – Результаты исследования фрагмента 3-й размерности

Для иллюстрации трех мерных исходных данных пришлось применить нестандартную форму математической записи. В верхних строках и левых столбцах матриц фрагментов ЭД и аппроксимирующего его полинома (см. рис.) проставлены значения x_1 и x_2. В левой матрице указаны F_x (экспериментальные данные), а во второй (правой) – значения, полученные применением СПО, т.е. аналитически рассчитанные данные. Варьирование структуры полинома проведено с выбором вариантов СП, удовлетворяющих диапазону относительной ошибки описания ЭД: 0,01–1 % с последующим поиском в полученном множестве вариантов структуры минимальной сложности.

Ввиду того, что универсальной и надежной теории оценки сложности структуры СП на сегодня не существует, авторами предложены и опробованы два вида критериев. Первый – это эвристически сформированная шкала сложности, в которой членам полинома назначается условная оценка, связанная с их порядком и равная ему. Второй критерий можно считать более обоснованным, так как его шкала сложности основана на экспериментальных оценках временных ресурсов, затраченных на расчет каждого члена СП (см. табл. 1). По ним на основе формулы (5) вычислялась сложность структуры варианта полинома.

Коды членов СП до 4-го порядка, а также отметки об их вхождении в варианты для 10 наилучших по структурно-параметрическим показателям полиномов приведены в столбцах таблицы 2. Наилучшими считались варианты СП, обладающие относительной ошибкой в заданных пределах. В каждом столбце «1» указывает на включение соответствующего члена в конечную структуру данного СП (z_i=1), а знак «--», напротив, говорит о его исключении из конечной структуры СП (z_i = 0). В нижних строках под этими столбцами приведены оценки каждого варианта.

В таблице 2 в последних 6-ти строках применяются следующие обозначения:

- «аб. ош.» и «от. ош.» характеризуют значения абсолютной и относительной ошибок аппроксимации;
- «Сум. 4» обозначает количество используемых в СП членов 4-го порядка и является дополнительным критерием оценки сложности структуры;
- «S1» обозначает суммарную сложность СП, основанную на теоретической или экспериментальной оценках временных ресурсов τ, затрачиваемых на вычисление результирующего значения каждого члена исследуемой СП;
- «S2» обозначает суммарную сложность СП, основанную на предложенной авторами эвристической шкале;
- «SC» обозначает суммарную сложность СП, основанную на двух шкалах, предложенных авторами.

В строках S1, S2 и SC приведены значения критериев, на основе которых производится оценка структурной сложности СП. Помимо этого учитывается количество членов четвёртого порядка в СП, так как их наличие ведёт к усложнению структуры. Из всех представленных вариантов в таблице 2 следует обратить внимание на 6-й и 4-й столбцы. Структура СП, которая представлена в шестом столбце в принятой постановке, может считаться абсолютным структурно-параметрическим оптимумом, так как при достаточной точности она имеет наименьшую структурную сложность.

Можно видеть, что СП, представленные в 1–5-м столбцах, имеют преимущество перед СП, представленным в шестом столбце, по величине абсолютной и относительной ошибок. Однако СП в 6-м столбце проще всех остальных 9-ти представленных вариаций СП по двум сформированным в данной работе критериям (S1, S2) и включает всего 4 члена четвёртого порядка. В то же время СП, представленный в 4-м столбце, включает уже 6 членов четвертого порядка.

Таблица 2 – Результаты структурно-параметрической оптимизации на основе предложенных шкал сложности

№ СП (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	--	1	--	1	1	1	--	1	--	1
2	--	--	--	1	--	1	--	1	--	1
3	1	1	1	1	1	--	--	--	--	--
11	--	--	--	--	--	1	--	--	--	--
12	1	1	1	--	--	--	--	--	1	--
13	--	--	--	--	--	--	1	1	--	1
22	1	--	--	1	1	--	1	--	1	--
23	--	1	1	--	--	1	1	1	--	1
33	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
111	1	--	--	1	1	1	--	1	1	1
112	1	1	1	--	1	--	1	1	1	--
113	1	1	1	--	--	--	1	1	1	--
122	--	1	1	--	1	1	--	--	--	--
123	1	--	--	1	--	1	1	1	1	1
133	1	1	1	--	1	1	--	--	1	1
222	--	1	1	1	1	--	1	1	--	1
223	1	--	--	--	1	1	--	--	1	--
233	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
333	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1111	1	--	--	--	--	1	1	--	1	--
1112	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1113	--	1	1	1	1	--	--	1	--	1
1122	1	1	1	1	1	--	1	1	1	1
1123	1	1	1	1	1	--	1	1	1	1
1133	1	1	1	1	1	--	1	1	1	1
1222	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1223	1	--	--	--	--	1	1	--	1	--
1233	1	--	--	--	--	1	1	--	1	--
1333	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2222	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
2223	1	1	1	1	1	--	1	1	1	1
2233	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
2333	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
3333	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
Абсолютная ошибка	6062,9	6243,7	6465,4	6498,4	6791	6918,4	7187	7262,6	8078,7	8138,3
Относительная ошибка	0,063	0,065	0,067	0,068	0,071	0,072	0,075	0,076	0,084	0,085
Сум. 4	7	9	9	9	9	11	7	8	7	9
S1	84,905	74,25	71,15	65,305	74,655	64,65	77,255	74,25	81,805	70,1
S2	60,5	50,5	49,5	43,5	51,5	42,5	55,5	50,5	59,5	47,5
SC	145,405	124,75	120,65	108,805	126,155	107,15	132,755	124,75	141,305	117,6

Заключение.

1. Предложенный шаблон кодирования структуры аппроксимирующего полинома обеспечил унифицированную и эффективную процедуру формирования универсальной математической модели для описания 1-, 2- и 3-мерных фрагментов данных. Причем возможность использования примененного алгоритма регулярного наращивания порядка для их больших значений не вызывает сомнений.

2. Предложенные математические модели оценки структурной сложности степенного полинома позволяют производить его структурную оптимизацию путем применения любых дискретных методов, что открывает новые возможности для решения задач оптимальной аппроксимации.

3. Совместное использование поискового эвристического алгоритма параметрической оптимизации и комбинаторного алгоритма структурной оптимизации полинома позволяет решать задачи условной оптимизации одного из предметно обусловленных критериев на фоне ограничения второго для аппроксимируемых фрагментов данных.

4. Эвристический алгоритм оптимизации полинома по точности аппроксимации, основанный на модификации ЭГА, позволяет находить субоптимальное математическое описание фрагментов высокой размерности, для которых использование метода комбинаторной оптимизации не является эффективным подходом с точки зрения временн*ы*х затрат.

Библиографический список

1. Айзерман М. А. Основы теории разрывных систем I / М. А. Айзерман, Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика. – 1974. – № 7. – С. 33–47.

2. Айзерман М. А. Основы теории разрывных систем II / М. А. Айзерман, Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика. – 1974. – № 8. – С. 39–61.

3. Нейдорф Р. А. Алгоритм структурно-параметрической оптимизации при решении задач локальной полиномиальной аппроксимации экспериментальных данных / Р. А. Нейдорф, В. В. Полях // Математические методы в технике и технологиях ММТТ-31 : сборник трудов XXX Международной научной конференции. – 2018. – Т. 5. – С. 48–56.

4. Толстых С. С. Матричный критерий структурной сложности замкнутых систем / С. С. Толстых // Вестник Тамбовского государственного технического университетата. – 1998. – Т. 4, № 2–3. – С. 238–244.

5. Bates Douglas M. Nonlinear regression analysis and its applications / Douglas M. Bates, Donald G. Watts. – New York : John Wiley & Sons, 1988. – 365 p.

6. Drapper N. R. Applied regression analysis / N. R. Drapper, H. Smith. – New York : John Wiley & Sons, 1981. – Vol. 1. – 366 p.

7. Drapper N. R. Applied regression analysis / N. R. Drapper, H. Smith. – New York : John Wiley & Sons, 1981. – Vol. 2. – 351 p.

8. Eberhart R. C. New optimizer, using particle swarm theory / R. C. Eberhart, J. A. Kennedy // Proceedings of the 6th International Symposium on Micromachine and Human Science. – Japan, Nagoya, 1995. – P. 39–43.

9. John O. Rawlings. Applied Regression Analysis: A Research Tool / John O. Rawlings, Sastry G. Pantula, David A. Dickey. – 2nd ed. – 1998.

10. Kennedy J. Particle Swarm Optimization / J. Kennedy, R. Eberhart // Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks. – New Jersey, Piscataway, 1995. – P. 1942–1948.

11. Neydorf R. Search Opportunities of Swarming Particles Methods in Irregular Multi-Extreme Environments / R. Neydorf, I. Chernogorov and D. Vucinic // Proceedings of The XI International Conference on Advanced Engineering Computing and Applications in Sciences ADVCOMP2017. – Spain, Barcelona, 2017. – P. 7–12.

12. Neydorf R. Bivariate “Cut-Glue” Approximation of Strongly Nonlinear Mathematical Models Based on Experimental Data / R. Neydorf // SAE Int. J. Aerosp. – 2015. – № 8 (1). – P. 47–54.

13. Neydorf R. Formal Characterization and Optimization of Algorithm for the Modelling of Strongly Nonlinear Dependencies Using the Method "Cut-Glue" Approximation of Experimental Data / R. Neydorf, I. Chernogorov, V. Polyakh, O. Yarakhmedov, J. Goncharova, A. Neydorf // SAE Technical Paper 2016-01-2033. – 2016. – P. 1–12.

14. Neydorf R. Formal Characterization and Optimization of Algorithm for the Modelling of Strongly Nonlinear Dependencies Using the Method "Cut-Glue" Approximation of Experimental Data / R. Neydorf, I. Chernogorov, V. Polyakh, O. Yarakhmedov et al. // SAE Technical Paper 2016-01-2033. – 2016. – DOI: 10.4271/2016-01-2033.

15. Neydorf R. "Cut-glue" approximation improvements with evolutionary-genetic algorithm for strongly nonlinear parametric dependencies of mathematical models / R. Neydorf, V. Polyakh, I. Chernogorov, O. Yarakhmedov, D. Vucinic // Improved Performance of Materials. Design and Experimental Approaches. – Springer, 2018. – P. 245–257. – Режим доступа: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-59590-0/page/2, свободный. – Заглавие с экрана. – Яз. рус.

16. Neydorf R. Comparative Analysis of Heuristic Algorithms for Solving Multiextremal Problems / R. Neydorf, I. Chernogorov, V. Polyakh, O. Yarakhmedov, Y. Goncharova, D. Vucinic // International Journal on Advances in Systems and Measurements. – 2017. – Vol. 10, № 1–2. – P. 86–99.

17. Neydorf R. Search Opportunities of Swarming Particles Methods in Irregular Multi-Extreme Environments / R. Neydorf, I. Chernogorov and D. Vucinic // Proceedings of The XI International Conference on Advanced Engineering Computing and Applications in Sciences ADVCOMP2017. – Spain, Barcelona, 2017. – P. 7–12.

18. Shi Y. A modified particle swarm optimizer / Y. Shi, R. C. Eberhart // Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation. – New Jersey, Piscataway, 1998. – P. 69–73.

References

1. Ayzerman M. A., Pyatnitskiy Ye. S. Osnovy teorii razryvnykh sistem I [The fundamentals of the theory of discontinuous systems]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1974, no. 7, pp. 33–47.

2. Ayzerman M. A., Pyatnitskiy Ye. S. Osnovy teorii razryvnyh sistem I [The fundamentals of the theory of discontinuous systems]. *Avtomatika I telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1974, no. 8, pp. 39–61.

3. Neydorf R. A., Polyakh V. V. Algoritm strukturno-parametricheskoy optimizatsii pri reshenii zadach lokalnoy polinomialnoy approksimatsii eksperimentalnykh dannykh [Algorithm of structural-parametric optimization in solving problems of local polynomial approximation of experimental data]. *Matematicheskiye metody v tekhnike i*

tekhnologiyakh MMTT-31 : sbornik trudov XXX Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii [Mathematical methods in engineering and technologies : Proceedings of the XXX International Scientific Conference], 2018, vol. 5, pp. 48–56.

4. Tolstykh S. S. Matrichnyy kriteriy strukturnoy slozhnosti zamknutykh sistem [Matrix criterion for the structural complexity of closed systems]. *Vestnik Tambovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Tambov State Technical University], 1998, vol. 4, no. 2–3, pp. 238–244.

5. Bates Douglas M., Watts Donald G. *Nonlinear regression analysis and its applications*. New York, John Wiley & Sons, 1988. – 365 p.

6. Drapper N. R., Smith H. *Applied regression analysis.* New York, John Wiley & Sons, 1981, vol. 1. 366 p.

7. Drapper N. R., Smith H. Applied regression analysis. New York, John Wiley & Sons, 1981, vol. 2. 351 p.

8. Eberhart R. C., Kennedy J. A. New optimizer, using particle swarm theory. *Proceedings of the 6th International Symposium on Micromachine and Human Science*. Japan, Nagoya, 1995, pp. 39–43.

9. John O. Rawlings, Sastry G. Pantula, David A. Dickey. *Applied Regression Analysis: A Research Tool.* 2nd ed. 1998.

10. Kennedy J., Eberhart R. Particle Swarm Optimization. *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*. New Jersey, Piscataway, 1995, pp. 1942–1948.

11. Neydorf R., Chernogorov I. and Vucinic D. Search Opportunities of Swarming Particles Methods in Irregular Multi-Extreme Environments. *Proceedings of the XI International Conference on Advanced Engineering Computing and Applications in Sciences ADVCOMP2017.* Spain, Barcelona, 2017, pp. 7–12.

12. Neydorf R. Bivariate “Cut-Glue” Approximation of Strongly Nonlinear Mathematical Models Based on Experimental Data. *SAE Int. J. Aerosp*., 2015, no. 8 (1), pp. 47–54.

13. Neydorf R., Chernogorov I., Polyakh V., Yarakhmedov O., Goncharova J., Neydorf A. Formal Characterization and Optimization of Algorithm for the Modelling of Strongly Nonlinear Dependencies Using the Method "Cut-Glue" Approximation of Experimental. *SAE Technical Paper* 2016-01-2033, 2016, pp. 1–12.

14. Neydorf R., Chernogorov I., Polyakh V., Yarakhmedov O. et al. Formal Characterization and Optimization of Algorithm for the Modelling of Strongly Nonlinear Dependencies Using the Method "Cut-Glue" Approximation of Experimental Data. *SAE Technical Paper* 2016-01-2033, 2016, doi: 10.4271/2016-01-2033.

15. Neydorf R., Polyakh V., Chernogorov I., Yarakhmedov O., Vucinic D. "Cut-glue" approximation improvements with evolutionary-genetic algorithm for strongly nonlinear parametric dependencies of mathematical models. *Performance of Materials. Design and Experimental Approaches*. Springer, 2018, pp. 245-257. Available at: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-59590-0/page/2.

16. Neydorf R., Chernogorov I., Polyakh V., Yarakhmedov O., Goncharova Y., Vucinic D. Comparative Analysis of Heuristic Algorithms for Solving Multiextremal Problems. *International Journal on Advances in Systems and Measurements*, 2017, vol. 10, no. 1–2, pp. 86–99.

17. Neydorf R., Chernogorov I. and Vucinic D. Search Opportunities of Swarming Particles Methods in Irregular Multi-Extreme Environments. *Proceedings of the XI International Conference on Advanced Engineering Computing and Applications in Sciences ADVCOMP2017*, Spain, Barcelona, 2017, pp. 7–12.

18. Shi Y., Eberhart R. C. A modified particle swarm optimizer. *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation*. New Jersey, Piscataway, 1998, pp. 69–73.

УДК 004.8+004.046+004.67

ОДНОМЕРНЫЕ (ЛИНЕЙНЫЕ) ГРАФИЧЕСКИЕ КОДЫ: АНАЛИЗ СПОСОБОВ ГЕНЕРАЦИИ, ТРАДИЦИОННЫХ И НОВЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ПРИМЕНЕНИЯ, ВОПРОСОВ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

Статья поступила в редакцию 20.11.2018, в окончательном варианте – 27.12.2018.

Абрамович Василий Владимирович, Астраханский государственный университет, 414056, Российская Федерация, г. Астрахань, ул. Татищева, 20а,

инженер отдела эксплуатации вычислительной техники, e-mail: abramovich@email.su

Брумштейн Юрий Моисеевич, Астраханский государственный университет, 414056, Российская Федерация, г. Астрахань, ул. Татищева, 20а,

кандидат технических наук, доцент, ORCID http://orcid.org/0000-0002-0016-7295, e-mail: brum2003@mail.ru

Сравнены методы представления информации о различных объектах способами, допускающими ее считывание и распознавание с использованием технических средств. Показаны возможности, достоинства и недостатки применения бихроматических линейных штрих-кодов по сравнению с представлением той же информации в виде совокупности цифр (или цифр и букв). Обсужден ряд вопросов информационной безопасности использования линейных штрихкодов при маркировке объектов, в том числе скрытой маркировки. Рассмотрены возможные технологии генерации линейных штрих-кодов для применения в различных целях, управления параметрами такой генерации, обеспечения информационной безопасности при генерации линейных штрих-кодов. Кратко описаны технические средства и программно-алгоритмические решения для нанесения линейных штрих-кодов на объекты, считывания линейных штрих-кодов различными методами, обработки считанной информации, обеспечения информационной безопасности в этих процессах. Проанализированы возможные цели, преимущества и недостатки использования некоторых нетрадиционных вариантов, включая линейных штрих-кодов, светящихся в ультрафио-