

20. Savochkin, A.E. Primenenie nejrosetevogo podhoda pri proektirovanii informacionno-izmeritel'nyh sistem dlja opredelenija stepeni povrezhdenija tehnichecki slozhnyh ob"ektov [Application of neural network approach in the design of information-measuring systems to determine the extent of damage is technically complex objects] // Prikaspijskij zhurnal: upravlenie i vysokie tehnologii [Caspian Journal: management and high technology]. – 2013, № 2 (22), pp. 151–160.

21. Fedorov Ju.N. Osnovy postroenija APCS vzryvoopasnyh proizvodstv [Fundamentals of process control hazardous areas]. V 2-h tomah, tom 1 M.: Sinteg. 2006, 255 p.

22. Fedoseev V., Garmash A., Orlova I., Jekonomiko-matematicheskie metody i prikladnye modeli [Economic-mathematical methods and applied models], Izdatel'stvo: Jurajt 2013, 336 p.

23. Chow G.C. Tests of Equality between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions *Econometrica*. – 1960. – Vol. 28, №3. – pp. 79–86.

24. Fisher R. A. On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Phil. Trans. Royal Soc. London A* 222, 1922, pp.309–368.

25. Gosset W. S., Tables for estimating the probability that the mean of a unique sample lies etc. *Biometrika*, 1917, vol. 11, pp. 414 – 417.

УДК 330.43, 339.743.44, 519.246.85

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ARIMA ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВАЛЮТНОГО КУРСА

Статья поступила в редакцию 05.10.2015 г., в окончательном варианте 13.11.2015 г.

Пилюгина Анна Валерьевна, кандидат экономических наук, доцент, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, 105005, Российская Федерация, г. Москва, ул. 2-ая Бауманская, 5, стр. 1, e-mail: pilyuginaanna@mail.ru

Бойко Андрей Алексеевич, аспирант, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, 105005, Российская Федерация, г. Москва, ул. 2-ая Бауманская, 5, стр. 1, e-mail: boiko_andrew@mail.ru

Описаны модель ARIMA и методика ее применения для краткосрочного прогнозирования среднемесячного курса доллара США к российскому рублю. Приведена классификация временных рядов (ВР) с точки зрения их стационарности. Описана процедура проверки ВР на стационарность с помощью критерия Дики–Фуллера. Показано, что рассматриваемый ВР среднемесячного валютного курса USD / RUB с января 2009 г. по август 2015 г. является «интегрированным первого порядка». Операция дифференцирования обращает среднемесячный курс в стационарный в широком смысле ВР. Для определения порядка авторегрессии p и скользящего среднего q использован оптимизационный поиск на сетке $[0..5; 0..5]$. В качестве критерия оптимизации использованы байесовский информационный критерий (BIC) и информационный критерий Акаике (AIC). По данным критериям оптимальной признана модель $ARIMA(2,1,5)$. Кроме того, предложен алгоритм адаптивной идентификации модели с уточнением порядка p и величины q , а также соответствующих коэффициентов при поступлении каждого следующего отсчета. Однако оценка точности прогноза показала, что для минимизации средней относительной ошибки прогноза ($MAPE$) следует использовать самые простые модели – а именно $ARIMA(1,1,0)$ и $ARIMA(0,1,1)$.

Ключевые слова: валютный курс, прогнозирование, временной ряд, стационарный относительно детерминированного тренда ряд, стационарный относительно взятия разностей ряд, модель ARIMA, байесовский информационный критерий (BIC), информационный критерий Акаике (AIC), средняя относительная ошибка прогноза ($MAPE$)

USING ARIMA MODELS
FOR FORECASTING OF CURRENCY EXCHANGE RATE

Pilyugina Anna V., Ph.D. (Economics), Associate Professor, Moscow State Technical University named after Bauman, 5 (building 1) 2-ya Baumanskaya St., Moscow, 105005, Russian Federation, e-mail: pilyuginaanna@mail.ru

Boiko Andrey A., post-graduate student, Moscow State Technical University named after Bauman, 5 (building 1) 2-ya Baumanskaya St., Moscow, 105005, Russian Federation, e-mail: boiko_andrew@mail.ru

ARIMA model and method of its implication for exchange rate of the US dollar to the Russian Federation rouble short-term forecasting are described. Time series classification from stationarity side is given. Procedure of time series stationarity checking using augmented Dickey–Fuller test is explained. It is shown that given time series of monthly average exchange rate of the US dollar to the Russian Federation rouble is an integrated time series of the first order. Differencing operation makes monthly average rate a weak stationary time series. For determining autoregression order p and moving average order q optimization mesh $[0..5; 0..5]$ search algorithm is used. Bayesian information criterion (BIC) and Akaike information criterion (AIC) are used as optimization criterions. Using these criterions an $ARIMA(2,1,5)$ model was chosen. Additionally, an adaptive model identification algorithm was proposed with p and q orders and corresponding coefficients refining upon receipt of every new time series sample. However, forecast error estimation showed that for mean average percentage error ($MAPE$) minimization the simplest ARIMA models should be used, more specifically, $ARIMA(1,1,0)$ and $ARIMA(0,1,1)$ models.

Keywords: currency exchange rate, forecasting, time series, trend stationary time series, difference stationary time series, ARIMA model, Bayesian information criterion (BIC), Akaike information criterion (AIC), mean average percentage error ($MAPE$)

Введение. Одним из наиболее распространенных адаптивных методов прогнозирования является модель ARIMA. Однако для применения данной модели при прогнозировании валютного курса существует серьезное препятствие: нестационарность данных используемых временных рядов (ВР). Поэтому целями данной работы были следующие: рассмотрение возможных методов приведения рассматриваемых ВР к классу стационарных; подбор оптимальной модели для осуществления процедуры прогнозирования с периодом упреждения (горизонтом прогнозирования) в один месяц.

Общая характеристика методов исследования, применяемых в предметной области. В настоящее время для прогнозирования ВР широко используется расширенная модель авторегрессии проинтегрированного скользящего среднего (АРПССР; англ. Autoregression integrated moving average extended, ARIMAX) [12, с. 19; 17, с. 2486; 25, с. 32]. Для решения задачи прогнозирования, как правило, принято рассматривать стационарные ВР [12, с. 20; 14, с. 272]. Причину такого подхода объясняет Г.Г. Канторович: «Если процесс ведет себя так, что его основные статистические характеристики со временем меняются, то мы по короткому кусочку наших наблюдений вообще ничего не сможем сказать о нем» [6, с. 89]. Выделяют два типа стационарности: строгая стационарность; слабая стационарность.

Ряд y_t называется *строго стационарным* (стационарным в узком смысле, англ. Strictly stationary), если совместное распределение вероятностей n наблюдений $y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_n}$ такое же, как и для n наблюдений $y_{t_1+\tau}, y_{t_2+\tau}, \dots, y_{t_n+\tau}$ для любых значений n, τ, t_1, \dots, t_n .

Ряд y_t называется *слабо стационарным* (стационарным в широком смысле, англ. weak stationary), если его теоретические значения для математического ожидания и дисперсии не зависят от времени, и если теоретическая ковариация между его значениями в моменты времени t и $t + \tau$ зависят только от τ , но не от t :

$$E(y_t) = \mu < \infty, \text{Var}(y_t) = \gamma_0 < \infty, \text{Cov}(y_t, y_{t+\tau}) = \gamma_\tau < \infty, \quad (1)$$

$$\gamma_\tau = E[(y_t - \mu) \times (y_{t+\tau} - \mu)].$$

Именно понятие слабой стационарности (стационарности в широком смысле) чаще всего используется на практике. Таким образом, для слабой стационарности ряда y_t необходимо, чтобы его математическое ожидание, дисперсия и ковариация не зависели от момента времени t . Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то ряд является нестационарным.

Среди нестационарных ВР практический интерес представляют два класса рядов [7, с. 268]: стационарные относительно детерминированного тренда (TS-ряды; англ. TS – trend stationary); стационарные относительно взятия разностей (DS-ряды; англ. DS – difference stationary).

Ряды, относящиеся к первому классу, приводятся к стационарным с использованием операции детрендринга («исключения тренда»), а ряды, относящиеся ко второму классу – с помощью операции дифференцирования. Таким образом, с точки зрения практического использования целесообразна следующая классификация ВР (рис. 1).

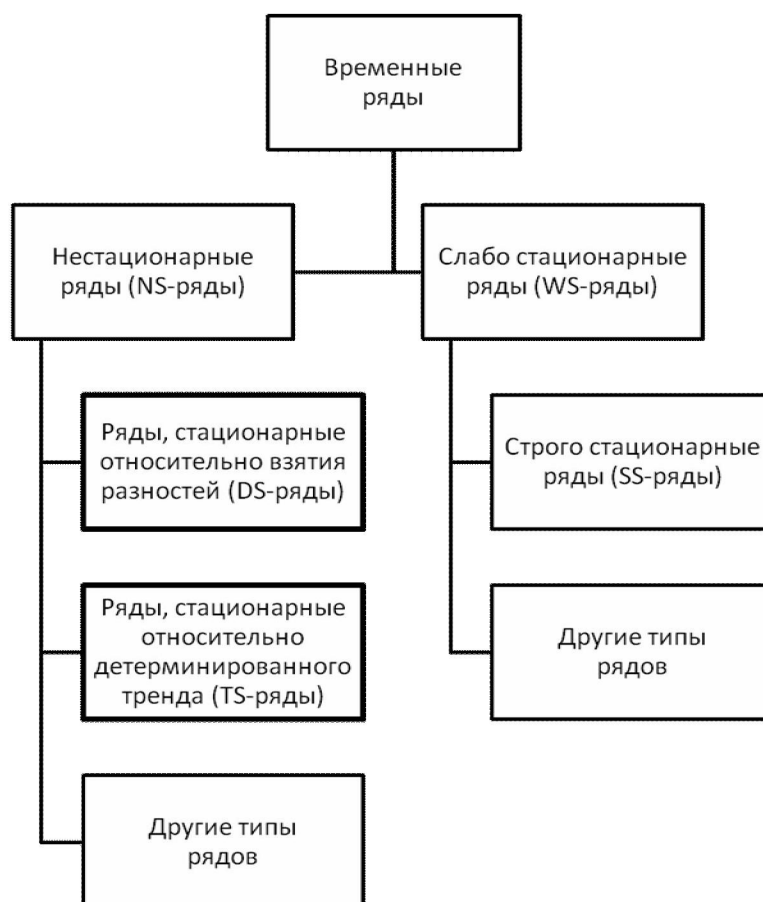


Рис. 1. Классификация ВР

После проведения операции «остационарирования» для прогнозирования ВР может использоваться построение модели ARIMA с использованием подхода Бокса–Дженкинса. При этом возможны три варианта: (1) выбор одной оптимальной модели с использованием заданного критерия (о критериях – см. далее); (2) формирование набора из нескольких оптимальных моделей [7, с. 260; 24, с. 127]; (3) выбор оптимальной модели при каждом поступлении новых данных (отчетов). Достаточно разработанным является первый вариант, в несколько меньшей мере – второй. Третий вариант в литературе не рассматривается, поэтому он и будет проанализирован в настоящей работе.

Характеристика материала, использованного для исследований. Как и ранее [11, с. 147] в качестве материала для исследований были использованы данные о курсе рубля по отношению к доллару, устанавливаемые Центральным банком Российской Федерации. Однако продолжительность анализируемого периода была увеличена – использовались данные с 11.01.2009 по 31.08.2015. Так же, как и ранее, осуществлялось вычисление среднемесячного курса доллара США. Причина выбора временного интервала длительностью в один месяц рассмотрена в [11, с. 147]. Массив анализируемых данных представлен в таблице (табл. 1) и на рисунке 2.

Таблица 1

Динамика среднемесячного валютного курса USD / RUB

Год и месяц	Курс, руб.	Год и месяц	Курс, руб.	Год и месяц	Курс, руб.	Год и месяц	Курс, руб.
09–январь	32,4923	11–январь	29,9919	13–январь	30,2271	15–январь	65,1531
09–февраль	35,8144	11–февраль	29,3211	13–февраль	30,1631	15–февраль	64,5182
09–март	34,6577	11–март	28,4637	13–март	30,8003	15–март	60,3631
09–апрель	33,5833	11–апрель	28,0840	13–апрель	31,3502	15–апрель	53,2187
09–май	31,9948	11–май	27,9343	13–май	31,3059	15–май	50,4680
09–июнь	31,0580	11–июнь	27,9871	13–июнь	32,3068	15–июнь	54,4490
09–июль	31,5082	11–июль	27,9123	13–июль	32,7407	15–июль	57,1797
09–август	31,6497	11–август	28,7465	13–август	33,0249	15–август	64,7469
09–сентябрь	30,8567	11–сентябрь	30,5717	13–сентябрь	32,6017	15–сентябрь	–
09–октябрь	29,4640	11–октябрь	31,3882	13–октябрь	32,0992	15–октябрь	–
09–ноябрь	28,9035	11–ноябрь	30,8230	13–ноябрь	32,694	15–ноябрь	–
09–декабрь	29,9589	11–декабрь	31,4911	13–декабрь	32,8807	15–декабрь	–
10–январь	29,8387	12–январь	31,2383	14–январь	33,7844	16–январь	–
10–февраль	30,1580	12–февраль	29,8855	14–февраль	35,2440	16–февраль	–
10–март	29,5594	12–март	29,3319	14–март	36,1986	16–март	–
10–апрель	29,1932	12–апрель	29,4909	14–апрель	35,6677	16–апрель	–
10–май	30,4349	12–май	30,8044	14–май	34,8337	16–май	–
10–июнь	31,1743	12–июнь	32,8784	14–июнь	34,4495	16–июнь	–
10–июль	30,6791	12–июль	32,5251	14–июль	34,6354	16–июль	–
10–август	30,3510	12–август	31,9568	14–август	36,0984	16–август	–
10–сентябрь	30,8119	12–сентябрь	31,5177	14–сентябрь	37,9018	16–сентябрь	–
10–октябрь	30,3228	12–октябрь	31,1157	14–октябрь	40,7987	16–октябрь	–
10–ноябрь	30,9866	12–ноябрь	32,2527	14–ноябрь	46,2175	16–ноябрь	–
10–декабрь	30,8577	12–декабрь	32,1568	14–декабрь	55,7704	16–декабрь	–

В соответствии с [15, с. 7], «тренд или тенденция $f(t)$, представляет собой устойчивую закономерность, наблюдаемую в течение длительного периода времени. Он описывается с помощью некоторой неслучайной функции $f(t)$, где t – время». Очевидно, что среднемесячный валютный курс USD / RUB демонстрирует восходящий тренд. Таким образом, не выполняется одно из условий слабой стационарности ВР – математическое ожидание оказывается зависящим от времени.

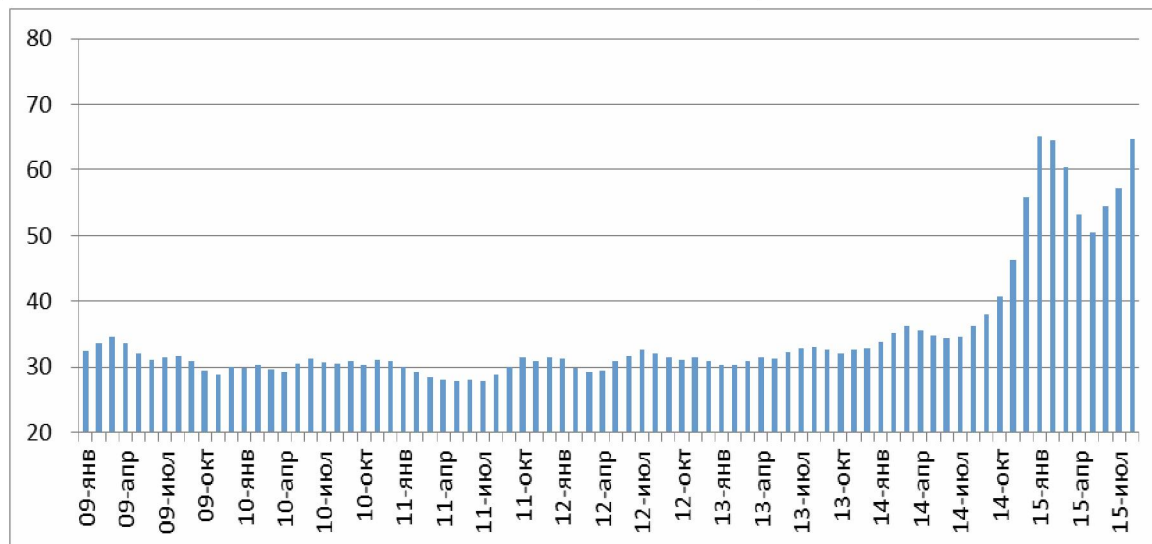


Рис. 2. Динамика среднемесячного валютного курса USD / RUB (руб. за 1\$) с января 2009 г. по август 2015 г.

Для проверки ВР на стационарность в системе MATLAB используется расширенный тест Дики – Фуллера (англ. ADF – Augmented Dickey–Fuller test), реализованный в виде функции `adftest`. Синтаксис, используемый для вызова данной функции, представлен ниже:

```
[h, pValue, stat, cValue, reg] = ...
    adftest(y, 'model', {'AR', 'ARD', 'TS'}) [21].
```

В качестве нулевой гипотезы в тесте Дики–Фуллера рассматривается наличие единичного корня в одномерном ВР y_t [20, с. 175]. Во всех вариантах теста используется модель:

$$y_t = c + d \times t + a \times y_{t-1} + b_1 \times (1-L) \times y_{t-1} + b_2 \times (1-L) \times y_{t-2} + \dots + b_p \times (1-L) \times y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (2)$$

где L – оператор сдвига, $L[y_t] = y_{t-1}$.

Наличие единичного корня соответствует равенству $a = 1$.

Параметр `'model'` представляет собой строку или массив строк, обозначающих тип модели. Параметр `'model'` может принимать следующие значения: `'AR'` (англ. autoregressive – авторегрессионная модель); `'ARD'` (англ. autoregressive with drift – авторегрессионная модель со смещением); `'TS'` (англ. trend stationary – модель ВР, стационарного относительно детерминированного тренда).

Если параметр `'model'` принимает значение `'AR'`, то в качестве нулевой гипотезы рассматривается модель, описываемая формулой (2), в которой параметры c и d принимаются равными нулю, т.е.:

$$y_t = y_{t-1} + b_1 \times (1-L) \times y_{t-1} + b_2 \times (1-L) \times y_{t-2} + \dots + b_p \times (1-L) \times y_{t-p} + \varepsilon_t. \quad (3)$$

В качестве альтернативной гипотезы рассматривается модель (4):

$$y_t = a \times y_{t-1} + b_1 \times (1-L) \times y_{t-1} + b_2 \times (1-L) \times y_{t-2} + \dots + b_p \times (1-L) \times y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (4)$$

где $a < 1$. Если параметр `'model'` принимает значение `'ARD'`, то в качестве нулевой гипотезы также рассматривается модель, описываемая формулой (2), в которой параметры c и d принимаются равными нулю (формула(3)), а в качестве альтернативной гипотезы рассматривается модель (5):

$$y_t = c + a \times y_{t-1} + b_1 \times (1-L) \times y_{t-1} + b_2 \times (1-L) \times y_{t-2} + \dots + b_p \times (1-L) \times y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (5)$$

где $a < 1$. Наконец, если параметр 'model' принимает значение 'TS', то в качестве нулевой гипотезы рассматривается модель, описываемая формулой (2), в которой только один параметр (d) принимается равным нулю, т.е.:

$$y_t = c + y_{t-1} + b_1 \times (1-L) \times y_{t-1} + b_2 \times (1-L) \times y_{t-2} + \dots + b_p \times (1-L) \times y_{t-p} + \varepsilon_t. \quad (6)$$

В качестве альтернативной гипотезы рассматривается модель (7):

$$y_t = c + d \times t + a \times y_{t-1} + b_1 \times (1-L) \times y_{t-1} + b_2 \times (1-L) \times y_{t-2} + \dots + b_p \times (1-L) \times y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (7)$$

где $a < 1$. Синтаксис, описанный выше, позволяет проводить одновременную проверку всех описанных моделей. Если возвращаемое значение функции равно «0», то это значит, что нулевая гипотеза о наличии единичного корня не может быть отвергнута при данном уровне значимости. Значение функции, равное «1», свидетельствует о том, что нулевая гипотеза может быть отвергнута в пользу альтернативной гипотезы, а рассматриваемый ВР является стационарным.

Применение функции `adfctest` к ВР, представленному в Таблица , дает результат [000], т.е., ни одна из альтернативных гипотез не может быть принята, а ВР является нестационарным. Кроме того, ВР не является стационарным относительно линейного тренда $f(t) = c + d \cdot t$, т.е. не относится к классу TS-рядов. Следовательно, процедура детрендрования (в рассматриваемом случае – удаления линейного тренда) не приведет к получению стационарного ряда.

В этом случае необходимо выполнить дифференцирование ВР, иначе говоря – перейти от ряда уровней y_t к ряду разностей [8, с. 819; 9, с. 436; 12, с. 20].

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}. \quad (8)$$

Дифференцирование временного ряда в MATLAB осуществляется с помощью функции `diff`. Синтаксис вызова функции:

$$dy = \text{diff}(y).$$

Полученный после выполнения дифференцирования массив данных представлен на рисунке 3.

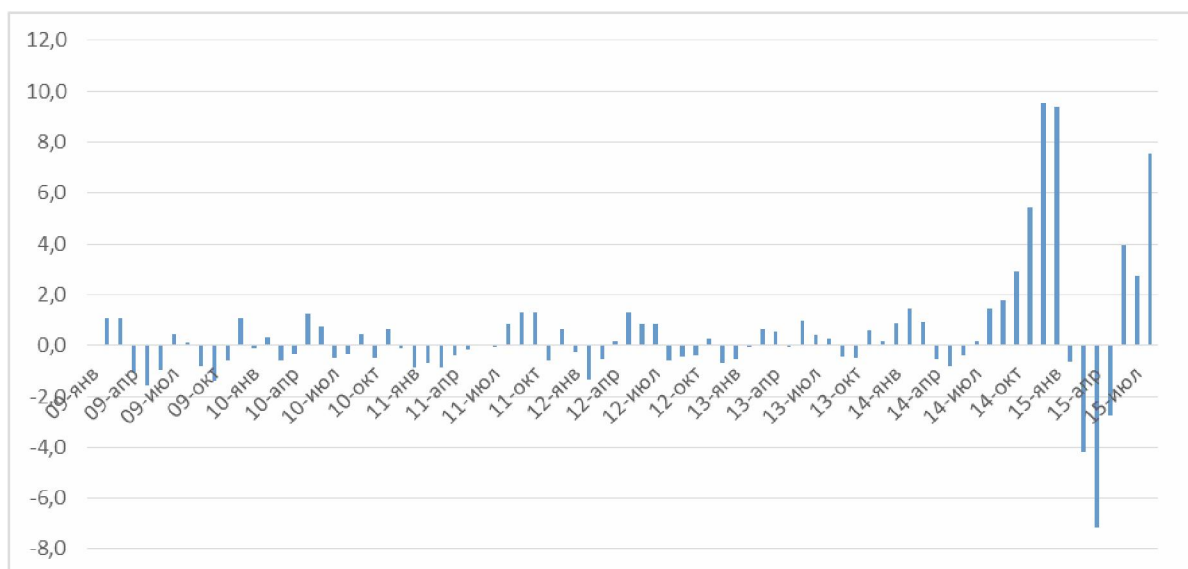


Рис. 3. Динамика разности среднемесячного валютного курса USD / RUB (руб. за 1\$) с февраля 2009 г. по август 2015 г.

Применение функции `adftest` к полученному ВР (значения dy) дает результат [11], т.е. нулевая гипотеза отвергается во всех трех случаях. Следовательно, после однократного дифференцирования ряд становится стационарным даже без применения дополнительных процедур детрендинга. Поэтому исходный ВР является интегрированным порядка 1 [1, с. 13; 9, с. 439]. «Остационаривание» ВР входит в состав 1-го этапа стандартного подхода Бокса и Дженкинса к построению модели ARIMA [2; 6, с. 11; 9, с. 340]. В общем случае построение модели ARIMA включает три этапа [9, с. 340; 22, с. 57]: идентификация модели; оценивание модели; диагностика модели.

Помимо установления порядка интеграции d на этапе идентификации осуществляется выбор порядка авторегрессии p и скользящего среднего q на основе анализа автокорреляционной функции (англ. ACF – autocorrelation function) и частной автокорреляционной функции (англ. PACF – partial autocorrelation function) [3, с. 54].

Бокс и Дженкинс приводят следующие рекомендации по вычислению значений автокорреляционной функции [2, с. 49]: «На практике для получения полезной оценки автокорреляционной функции нам нужно по меньшей мере 50 наблюдений, и выборочные автокорреляции r_k должны быть вычислены для $k = 0, 1, \dots, K$, где K не больше чем примерно $N/4$ ». В нашем случае общее количество наблюдений равно 80 (табл. 1). Следовательно, выборочные автокорреляции должны быть вычислены для 20 значений сдвига, что соответствует значению по умолчанию соответствующей функции MATLAB для вычисления автокорреляции `autocorr`.

Значения выборочных автокорреляционной и частной автокорреляционной функций ряда dy представлены в таблице 2 и на рисунке 4.

Таблица 2

Значения выборочных автокорреляционной и частной автокорреляционной функций ряда dy ($k = 0, 1, \dots, 20$)

k	ACF	PACF	k	ACF	PACF
0	1	1	–	–	–
1	0,5642	0,6438	11	0,1106	0,0498
2	0,1028	–0,4581	12	0,0441	0,2122
3	–0,3189	–0,3030	13	–0,0484	0,0111
4	–0,4218	–0,1198	14	–0,0815	–0,1429
5	–0,1740	0,2840	15	–0,0564	0,0803
6	–0,0093	–0,3488	16	–0,0011	0,3918
7	0,1499	0,3626	17	0,0423	–0,0012
8	0,1536	0,1979	18	0,0724	0,4219
9	0,1542	0,5478	19	0,0734	0,2520
10	0,1680	0,1376	20	0,0134	–0,1014

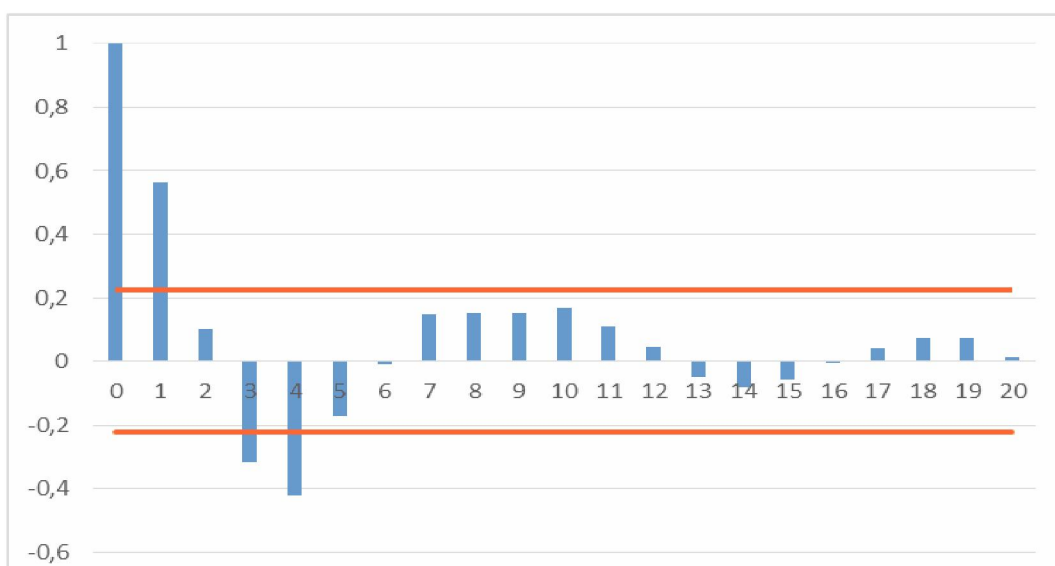
Анализ графиков автокорреляционной и частной автокорреляционной функций не позволяет непосредственно определить порядок авторегрессии p и порядок скользящего среднего q . Тем не менее, осциллирующее затухание автокорреляционной функции позволяет сделать вывод о том, что «остационаривание» ВР было выполнено успешно, и в дальнейшем дифференцировании нет необходимости. Непосредственно определить порядок p и q в модели $ARIMA(p, d, q)$ на данном этапе невозможно. Поэтому рассмотрим все возможные комбинации моделей с $0 \leq p \leq 5$, $d = 1$ и $0 \leq q \leq 5$. Общее количество рассматриваемых моделей, таким образом, составит 36. При этом сравнение построенных моделей будем выполнять с помощью широко используемых информационных критериев Акаике

и Шварца [7, с. 255; 19, с. 503]. Информационный критерий Акаике (англ. AIC – Akaike information criterion) вычисляют по формуле [7, с. 255]:

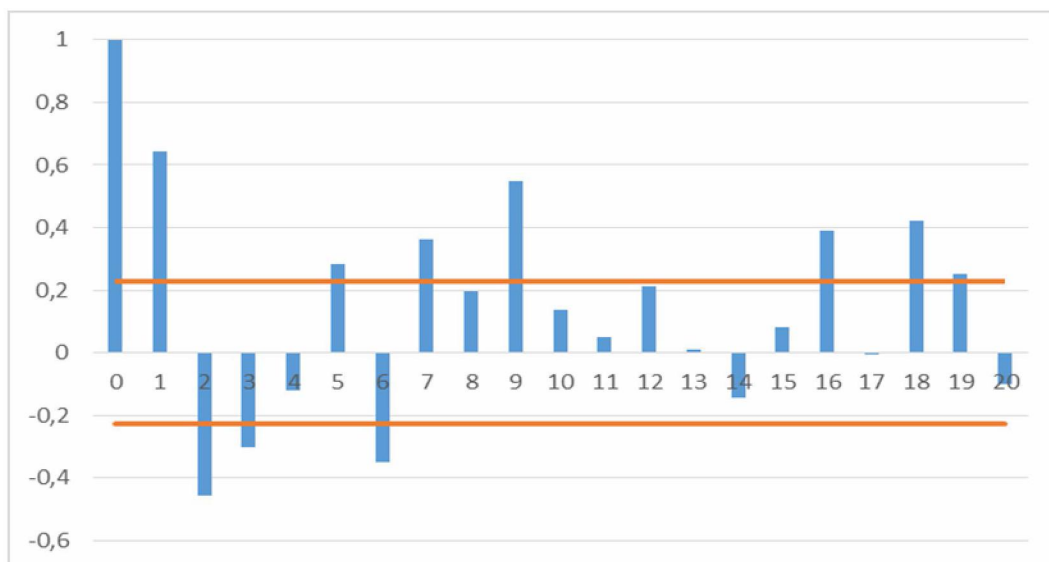
$$AIC(p, q) = \ln \hat{\sigma}^2 + 2 \times (p + q) / N, \quad (9)$$

где N – как и ранее, число наблюдений (для разности курса число наблюдений составляет 79);

$$\hat{\sigma}^2 = RSS / (N - p - q). \quad (10)$$



а)



б)

Рис. 4. Автокорреляционная функция (а) и частная автокорреляционная функция (б) разности среднемесячного валютного курса USD / RUB с февраля 2009 г. по август 2015 г.

Линией красного цвета на графиках показаны нижняя и верхняя границы доверительного интервала. В этих границах с вероятностью, близкой к 0,95, должно заключаться при $k > 0$ значение $ACF(k)$, если y_t – белый шум, и при $k > p$ значение $PACF(k)$, если $y_t \sim AR(p)$

Информационный критерий Шварца, называемый также байесовским информационным критерием (англ. BIC – Bayesian information criterion, иногда SC – Schwarz Criterion) вычисляются по формуле [7, с. 255]:

$$BIC(p, q) = \ln \hat{\sigma}^2 + \ln N \times (p + q) / N. \quad (11)$$

При этом RSS (англ. Residual sum of squares, остаточная сумма квадратов) вычисляются по формуле (12) [16, с. 2]:

$$RSS = \sum_{i=1}^N (e_i^2) = \sum_{i=1}^N (y_i - f_t^{(m)})^2, \quad (12)$$

где y_t – значение ВР в момент времени t ; $f_t^{(m)}$ – прогнозируемое значение в момент времени t , полученное в результате использования исследуемой модели прогнозирования.

Таким образом, итоговые формулы для вычисления информационных критериев Акаике и Шварца выглядят следующим образом (13), (14):

$$AIC(p, q) = \ln \left[1 / (N - p - q) \times \sum_{i=1}^N (y_i - f_t^{(m)})^2 \right] + 2 \times (p + q) / N, \quad (13)$$

$$BIC(p, q) = \ln \left[1 / (N - p - q) \times \sum_{i=1}^N (y_i - f_t^{(m)})^2 \right] + \ln N \times (p + q) / N. \quad (14)$$

Следует отметить, что рассматриваемые критерии построены похожим образом: «логарифмы остаточной суммы квадратов плюс штраф за уменьшение числа степеней свободы» [7, с. 255]. Поскольку, как правило, N велико, то $\ln N > 2$. Следовательно, критерий Шварца сильнее «штрафует» за чрезмерный порядок модели АРПСС p и q . В настоящей работе используются оба критерия с последующим анализом полученных результатов. Полученные значения критериев представлены в таблицах 3 и 4.

Таблица 3

Значения критерия Акаике (AIC) для $p = 0 \dots 5$ и $q = 0 \dots 5$

q		0	1	2	3	4	5
p							
0	0	0	319,1048	312,8015	304,2149	301,8249	302,6653
1	320,1056	314,4493	311,4084	295,5409	300,0802	301,4090	
2	303,2342	299,2357	299,6651	300,5828	299,7034	285,1429	
3	299,4319	300,4940	301,6266	295,4293	296,4579	287,1410	
4	300,6652	291,0595	293,5917	295,3038	297,2402	285,7893	
5	297,5154	292,0229	293,5215	293,2083	290,8323	293,1806	

Таблица 4

Значения критерия Шварца (BIC) для $p = 0 \dots 5$ и $q = 0 \dots 5$

q		0	1	2	3	4	5
p							
0	–	–	321,4742	317,5404	311,3233	311,3027	314,5125
1	322,4750	319,1882	318,5168	305,0187	311,9275	315,6257	
2	307,9731	306,3440	309,1429	312,4301	313,9201	301,7290	
3	306,5403	309,9718	313,4738	309,6460	313,0440	306,0966	
4	310,1430	302,9068	307,8084	311,8899	316,1958	307,1143	
5	309,3626	306,2396	310,1077	312,1639	312,1573	316,8751	

Анализируя таблицы 3 и 4 можно сделать следующие выводы. (1) Оба информационных критерия дают одинаковый результат, но оптимальной с точки зрения минимизации информационных критериев является модель $ARIMA(2,1,5)$. (2) Для выбранной модели значение критерия AIC меньше значения критерия BIC , что подтверждает высказанное ранее суждение о характере учета дополнительных параметров данными критериями.

Следует отметить, что вычисление критериев AIC и BIC в MATLAB осуществляется по формулам, несколько отличающимся от приведенных выше, а именно по (15) и (16):

$$AIC(p, q) = -2 \times LLF + 2 \times NumParam, \quad (15)$$

$$BIC(p, q) = -2 \times LLF + \ln(NumObs) \times NumParam, \quad (16)$$

где LLF – логарифмическая функция правдоподобия; $NumParam$ – число параметров модели – в MATLAB оно определяется как $NumParam = length(Info.X)$ (см. фрагмент кода); $NumObs$ – число наблюдений.

Фрагмент программного кода в MATLAB для вычисления AIC и BIC на заданной сетке значений $p = 0 \dots 5$ и $q = 0 \dots 5$ представлен ниже.

```
AIC = zeros(6, 6);
BIC = zeros(6, 6);
for p = 0:1:5
    for q = 0:1:5
        Mdl = arima(p, 0, q);
        [EstMdl, ~, logL, info] = ...
            estimate(Mdl, dY, 'print', false);
        NumParam = length(info.X);
        [aic, bic] = aicbic(logL, NumParam, size(dY, 1));
        AIC(p+1, q+1) = aic;
        BIC(p+1, q+1) = bic;
    end
end
```

В рассматриваемом подходе выбирается одна модель (наилучшая). Однако, возможны еще, как минимум, два подхода. Один из них рассмотрен в [7, с. 260]: «Если мы можем один и тот же процесс записать моделями достаточно близкими по характеристикам, то будем формировать так называемый портфель моделей (набирать группу моделей)». В качестве меры близости моделей в [24, с. 127] предложено использовать величину R , вычисляемую по формуле:

$$R = \exp\left\{-1/2 \times T \times [AIC(p_1, q_1) - AIC(p, q)]\right\}, \quad (17)$$

где (p_1, q_1) – параметры наилучшей модели по одному из критериев AIC или BIC (в данном случае, в формуле (17), по критерию AIC); (p, q) – параметры модели, которая анализируется на предмет возможности включения в портфель.

Модель может быть включена в портфель, если $1 < R < \sqrt{10}$ [24, с. 127].

Но возможен и второй подход: определять оптимальную по одному из критериев (AIC или BIC) модель; выполнять краткосрочное прогнозирование с периодом упреждения в один месяц, а при поступлении новых данных проводить повторный выбор оптимальной модели и использовать уже ее для прогнозирования на следующий месяц. В настоящей работе будет рассмотрен именно этот подход. Для этого, как и ранее, будем использовать данные о среднемесячном курсе доллара США к российскому рублю (табл. 1).

При этом первые 12 значений фактически будут использованы для определения параметров первой модели, используемой для получения первого прогнозного значения (для 13-го месяца, т.е. января 2010 г.).

Количество значений, используемых для определения параметров, определяется как сумма порядка авторегрессии AR , интеграции I и скользящего среднего MA , увеличенная на единицу:

$$\min NumObs = \max AR + \max I + \max MA + 1 = 5 + 1 + 5 + 1 = 12.$$

Соответственно, количество значений ВР должно быть в этом случае не менее 13.

На графиках, приводимых ниже (рис. 5) представлено следующее: исходный ВР (отсчеты 1–80); ВР, полученный в результате применения описанной процедуры прогнозирования (отсчеты 13–80); нижняя и верхняя границы доверительного интервала для прогнозного ВР (отсчеты 13–80).

Предварительный анализ полученных данных позволяет сделать следующий вывод: из 68 действительных значений 5 оказываются меньше нижней границы доверительного интервала; 17 – больше верхней границы доверительного интервала; 46 – в пределах доверительного интервала.

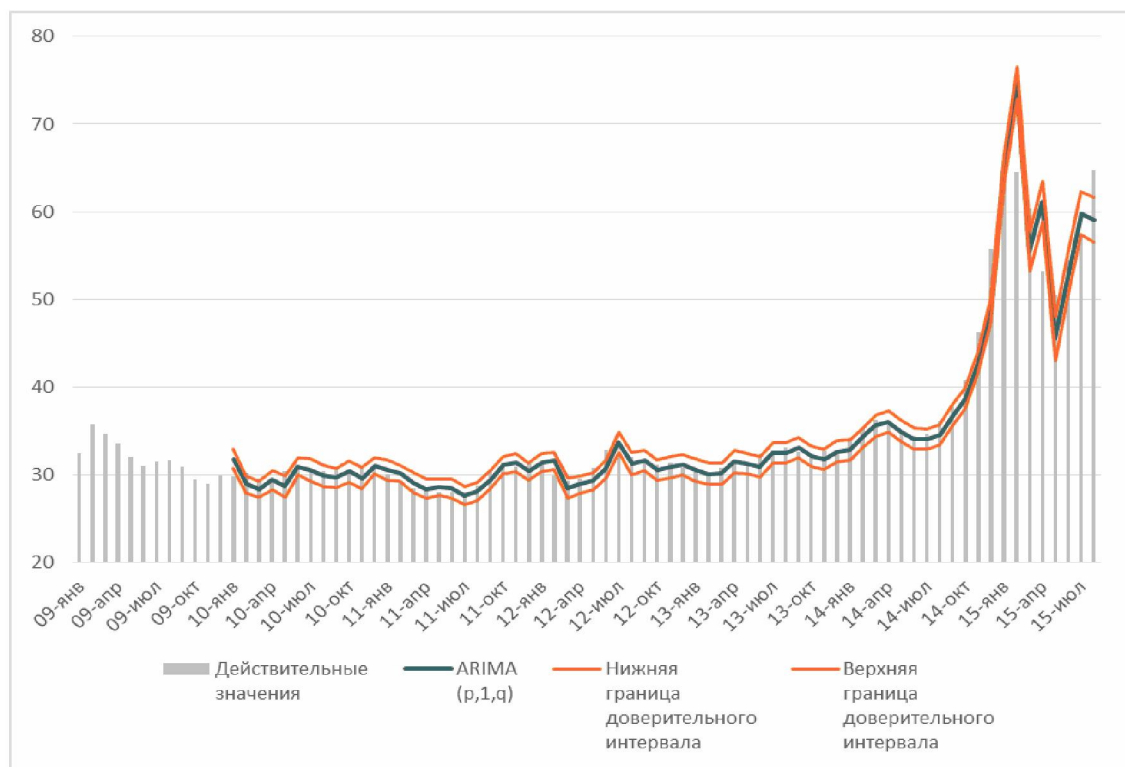


Рис. 5. Действительные и прогнозные значения курса доллара (руб. за 1\$; модель $ARIMA(p,1,q)$)

Таким образом, разработанная модель обнаруживает склонность к занижению прогнозных значений. Отчасти это связано со скачкообразными изменениями курса доллара США к российскому рублю начиная с ноября 2014 г.

Средняя относительная ошибка прогноза, вычисленная по 68 значениям (отсчеты 13–80), составляет 3,20 %.

В статье, посвященной прогнозированию с использованием нечетких множеств [11, с. 155] при прогнозировании 15 значений (с октября 2011 г. по декабрь 2012 г.) было получено значение средней относительной ошибки прогноза, равное 2,43 %. Проведем численный эксперимент и определим значения средней относительной ошибки прогноза, получающиеся при использовании рассматриваемого в настоящей статье метода, для следующих вариантов. **(1)** Анализируются отсчеты 1–48. При этом первые 12 отсчетов используются для определения параметров первой модели. Отсчеты 13–33 прогнозируются, но не учитываются при подсчете средней относительной ошибки прогноза, и фактически используются для адаптации модели. Отсчеты 34–48 прогнозируются и учитываются при подсчете ошибки. **(2)** Анализируются отсчеты 22–48. При этом отсчеты 22–33 используются для определения параметров первой модели. Отсчеты для адаптации модели отсутствуют, а отсчеты 34–48, как и ранее, прогнозируются и учитываются при подсчете ошибки. **(3)** Аналогичен варианту 1, только вместо значений в феврале 2009 г., сентябре 2011 г. и июне 2012 г. используется среднеарифметическое двух соседних уровней, т.е. отсчетов (для замены аномальных значений, определенных по критерию Ирвина, [11, с. 147]). В настоящей работе анализ ВР на предмет аномальных значений не проводился, поскольку с учетом скачкообразных изменений курсов начиная с ноября 2014 г., такой анализ стал в принципе не актуален. Однако поскольку ранее такой анализ был выполнен, то в настоящей статье данный вариант (наряду с другими) также рассматривается для обеспечения сопоставимости получаемых данных. **(4)** Аналогичен варианту 2 и содержит модификацию данных, описанную в варианте 3.

Кроме того, рассмотрим вариант так называемого «наивного прогнозирования», который соответствует предположению «завтра будет как сегодня», то есть реализует модель

$$y_t = y_{t-1}. \quad (18)$$

На практике данную модель часто применяют в качестве референсной для анализа результатов, полученных с помощью других моделей – чтобы определить целесообразность их использования [5, с. 107; 23, с. 430]. Наивное прогнозирование рассмотрим для двух случаев. **(А)** Анализируются отсчеты 1–48. При этом первый отсчет используется для «псевдообучения модели» – построения прогноза на второй отсчет. Отсчеты 2–48 прогнозируются и учитываются при подсчете ошибки. **(Б)** Анализируются отсчеты 33–48. Отсчет 33 используется для построения прогноза на 34-ый отсчет, а отсчеты 34–48 прогнозируются и учитываются при подсчете ошибки. Средняя относительная ошибка прогноза для каждого из указанных вариантов представлена в таблице 5.

Таблица 5

Средняя относительная ошибка прогноза для различных вариантов

Вариант	1	2	3	4	А	Б
MAPE, %	2,68	2,57	2,53	2,91	3,08	2,20

Для полного набора данных (отсчеты 1–80) дополнительно выполним прогнозирование с использованием моделей ARIMA, широко применяемых на практике. Согласно [2], в наиболее распространенных моделях $ARIMA(p, d, q)$ используются комбинации порядков (0,1,1), (0,2,2), (1,1,1), (1,1,0) и (2,1,0) (приводится по [4, с. 53]). Выполним сравнение результатов, получаемых для различных моделей: для модели (2,1,5); для разработанной адаптивной модели $(p, 1, q)$; для модели наивного прогнозирования.

В ряде случаев при выполнении функции estimate система MATLAB выдавала сообщение об ошибке Error using arima/validateModel (line 1298). The non-seasonal moving average polynomial is non-invertible. В этом случае анализируемая модель заменялась на $ARIMA(1,1,1)$ и вычисления продолжались.

Графики для действительных и прогнозных значений ARIMA для различных моделей представлены на рисунках 6–11.

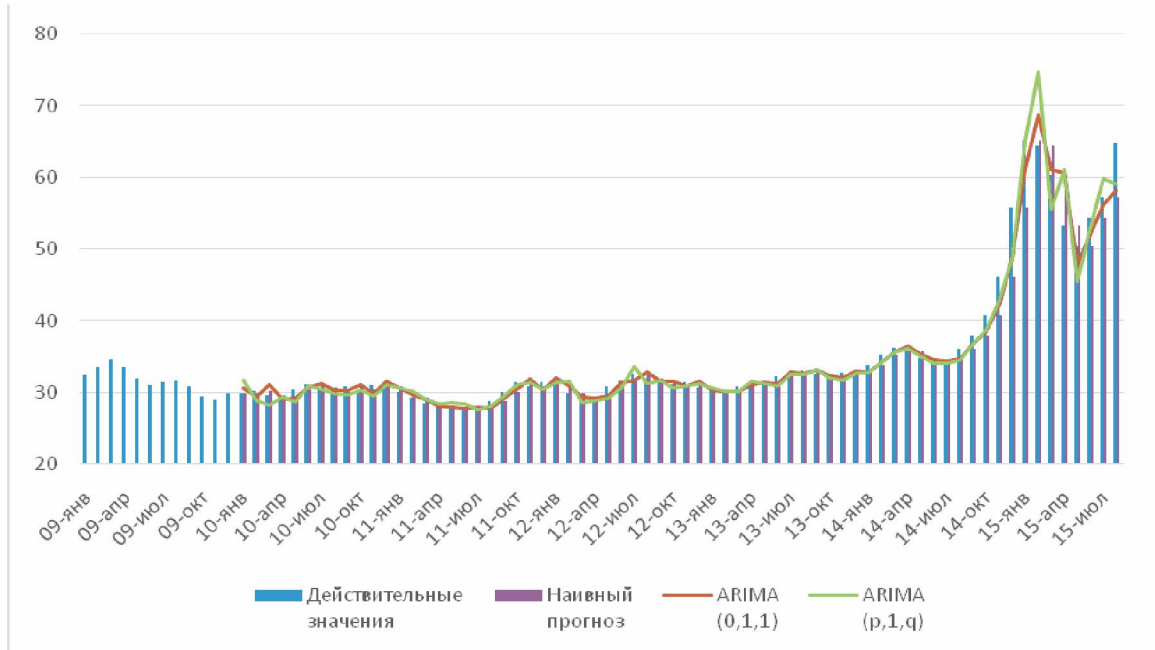


Рис. 6. Действительные и прогнозные значения курса доллара (руб. за 1\$; модели $ARIMA(0,1,1)$, $ARIMA(p,1,q)$)

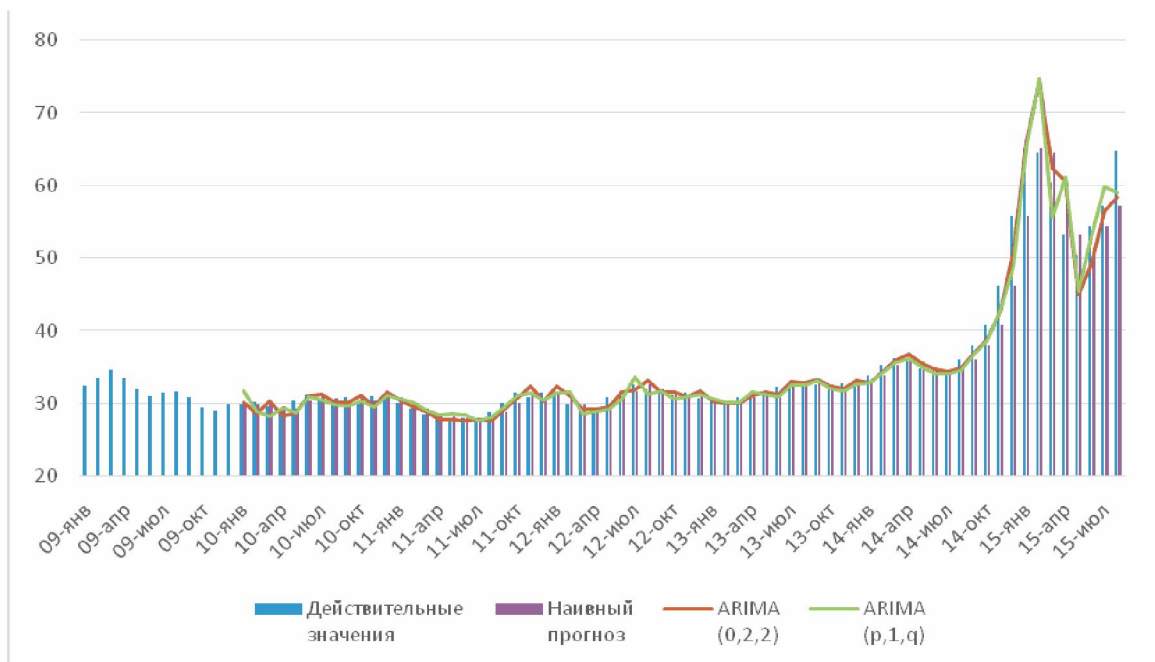


Рис. 7. Действительные и прогнозные значения курса доллара (руб. за 1\$; модели $ARIMA(1,1,1)$, $ARIMA(p,1,q)$)

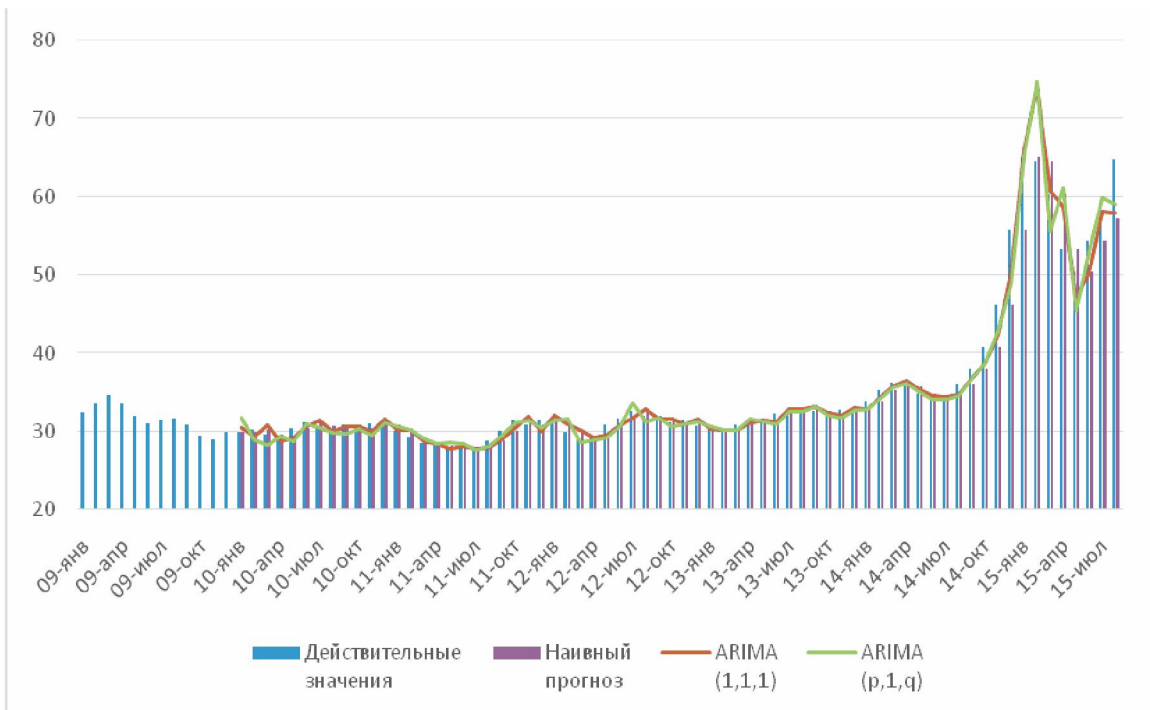


Рис. 8. Действительные и прогнозные значения курса доллара (руб. за 1\$; модели $ARIMA(1,1,1)$, $ARIMA(p,1,q)$)

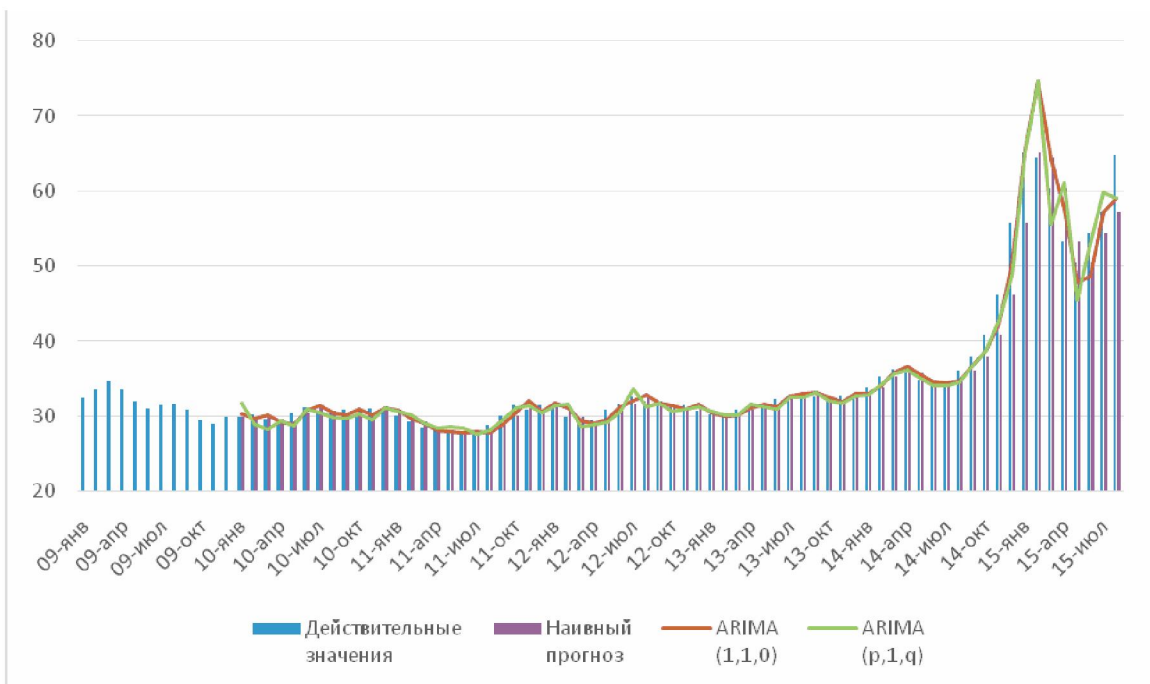


Рис. 9. Действительные и прогнозные значения курса доллара (руб. за 1\$; модели $ARIMA(2,1,0)$, $ARIMA(p,1,q)$)

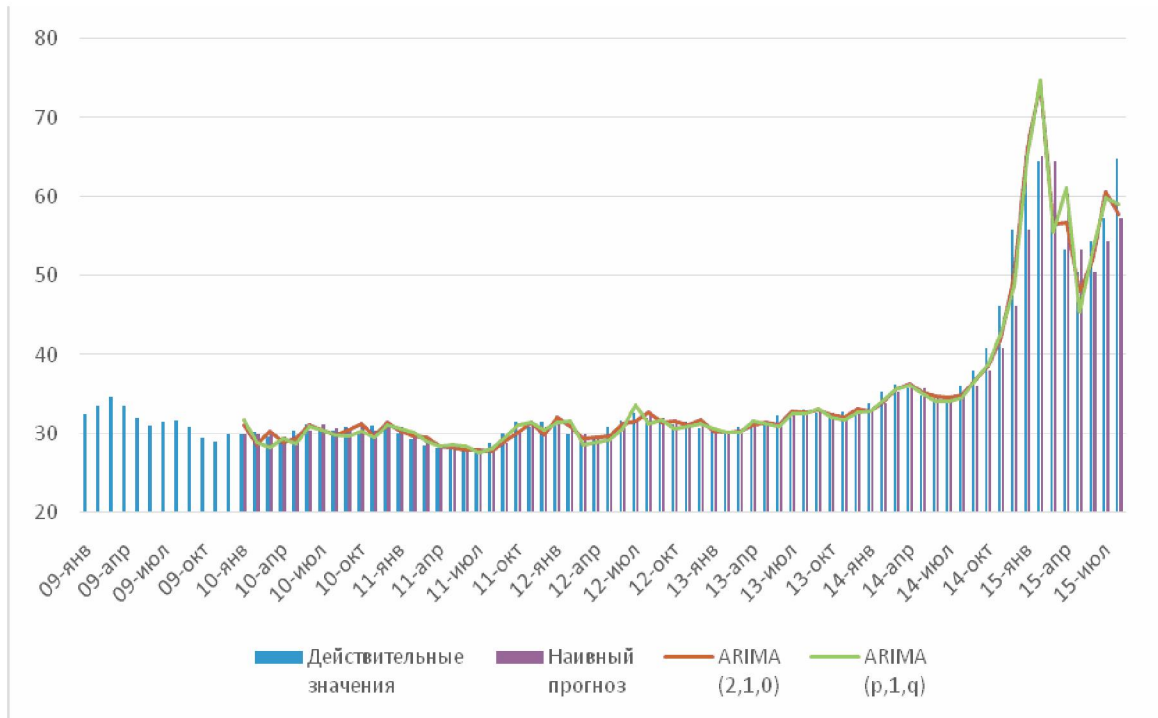


Рис. 10. Действительные и прогнозные значения курса доллара (руб. за 1\$; модели $ARIMA(2,1,0)$, $ARIMA(p,1,q)$)

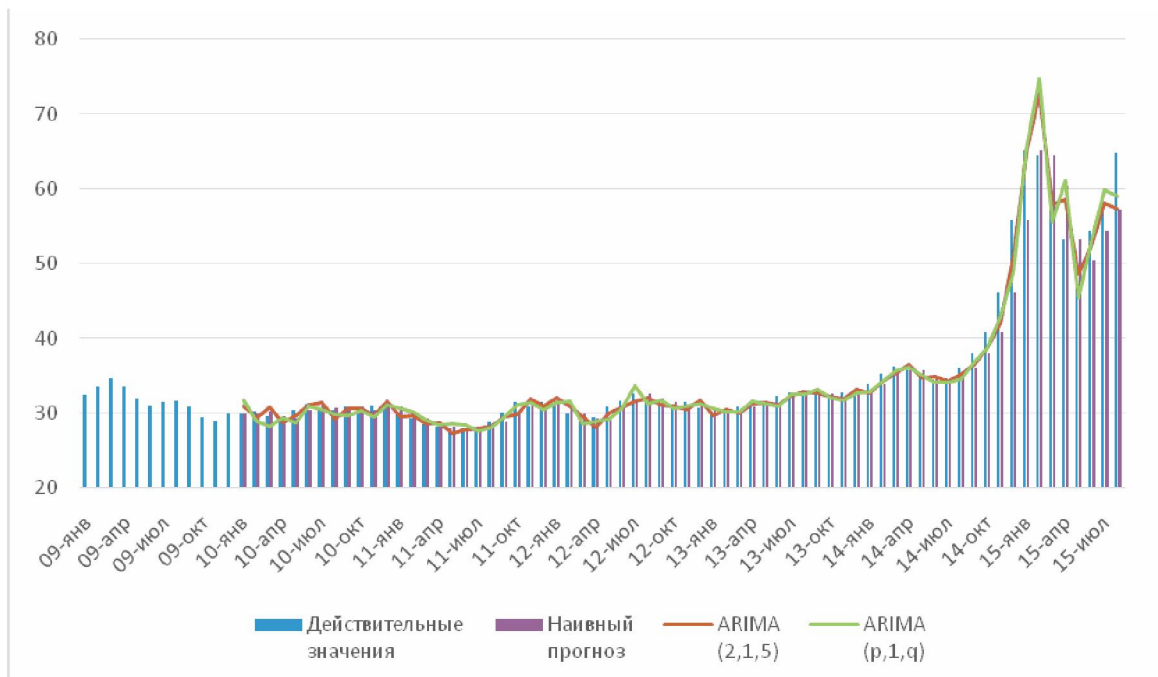


Рис. 11. Действительные и прогнозные значения курса доллара (руб. за 1\$; модели $ARIMA(2,1,5)$, $ARIMA(p,1,q)$)

Результаты вычисления *MAPE* для моделей $ARIMA(0,1,1)$, $ARIMA(1,1,1)$, $ARIMA(1,1,1)$, $ARIMA(1,1,0)$, $ARIMA(2,1,0)$, $ARIMA(2,1,5)$, $ARIMA(p,1,q)$ и наивного прогнозирования представлены в таблице 6.

Таблица 6

Средняя относительная ошибка прогноза для различных моделей ARIMA

Модель	MAPE, %	Модель	MAPE, %
$ARIMA(0,1,1)$	2,76	$ARIMA(2,1,0)$	2,86
$ARIMA(0,2,2)$	3,04	$ARIMA(2,1,5)$	2,83
$ARIMA(1,1,1)$	2,84	$ARIMA(p,1,q)$	3,20
$ARIMA(1,1,0)$	2,74	Наивное прогнозирование	3,14

Анализ данных, представленных в таблице 6 и на графиках, позволяет сделать следующие **выводы**. (1) Все рассмотренные модели ARIMA обеспечивают MAPE, не превышающую 5 %. Это позволяет говорить о достаточно высокой точности прогноза [13, с. 63]. (2) Все рассмотренные модели ARIMA, за исключением адаптивной модели $ARIMA(p,1,q)$, обеспечивают точность прогнозирования, превосходящую точность, получаемую при использовании наивной модели прогнозирования. Таким образом, использование более сложных моделей прогнозирования (ARIMA – по сравнению с наивной моделью) является принципиально оправданным. (3) Наилучшие результаты показывают самые простые модели – $ARIMA(0,1,1)$, MAPE 2,76 %, и $ARIMA(1,1,0)$, MAPE 2,74 %. По критерию средней относительной ошибки прогноза годится любая из этих двух моделей. На данном этапе исследований чуть более предпочтительной выглядит модель $ARIMA(1,1,0)$, поскольку ее ошибка меньше на две сотых процентных пункта. Однако для принятия окончательного решения целесообразно проведение дополнительных исследований. (4) Дальнейшее увеличение сложности модели (порядка авторегрессии p и скользящего среднего q) не приводит к улучшению точности прогноза. Наоборот, для моделей более высокого порядка значение MAPE оказывается выше. Это вместе с более сложными (а значит – более ресурсоемкими и более длительными) вычислениями вынуждает отказаться от их использования. (5) Предложенная адаптивная модель (с выбором порядка p и q на каждом шаге) показала самый плохой результат (MAPE 3,20 %). Он оказался даже хуже результата наивной модели прогнозирования (3,14 %). Это заставляет признать дальнейшую разработку (совершенствование) этой модели и ее использование нецелесообразными.

Таким образом, ряд среднемесячных значений курса доллара США к российскому рублю является интегрированным порядка «1», а оптимальными с точки зрения минимизации MAPE являются модели $ARIMA(0,1,1)$ и $ARIMA(1,1,0)$.

Список литературы

1. Балонишников А.М., Балонишникова В.А., Копыльцов А.В. Прогнозирование временных рядов методами Фармера–Сидоровича и Бокса–Дженкинса // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. – 2011. № 141. – С. 7–16.
2. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. – М.: Мир. – 1974. – 406 с.
3. Брюков В.Г. Как предсказать курс доллара. Эффективные методы прогнозирования с использованием Excel и Eviews / В.Г. Брюков. – М.: КНОРУС; ЦИПСИР, 2011. – 272 с.

4. Дорохов Е.В. Применение адаптивных, ARIMA и ARCH методов при прогнозировании краткосрочной динамики российского фондового рынка // *Финансы и бизнес*. – 2007. – № 3. С. 47–63.
5. Земан Р., Стухлы Я. Прогнозные модели для акций «Эрсте Банк» («Erste Bank») // *Вестник Астраханского государственного технического университета*. Серия: Экономика. – 2013. № 2. С. 104–111.
6. Канторович Г.Г. Лекции: Анализ временных рядов (лекции 1–4) // *Экономический журнал Высшей школы экономики*. – 2002. – Т. 6. – № 1. – С. 85–116.
7. Канторович Г.Г. Лекции: Анализ временных рядов (лекции 5–7) // *Экономический журнал Высшей школы экономики*. – 2002. – Т. 6. – № 2. – С. 251–273.
8. Мхитарян С.В., Данченко Л.А. Прогнозирование продаж с помощью адаптивных статистических методов // *Фундаментальные исследования*. – 2014. – № 9–4. С. 818–822.
9. Носко В.П. Эконометрика. Кн. 1. Ч. 1, 2: учебник / В.П. Носко. – М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2011. – 672 с. (Сер. «Академический учебник».)
10. Носко В.П. Эконометрика. Кн. 2. Ч. 3, 4: учебник / В.П. Носко. – М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2011. – 576 с. (Сер. «Академический учебник».)
11. Пилогина А.В., Бойко А.А. Опыт использования аппарата нечетких множеств в прогнозировании валютного курса // *Прикаспийский журнал: Управление и высокие технологии*. – 2014. – № 3 (27). – С. 143–157.
12. Резниченко Е.В., Кочегурова Е.А. Методы краткосрочного прогнозирования финансовых рынков // *Известия Томского политехнического университета*. – 2007. – Т. 311. – № 6. – С. 19–23.
13. Садовникова Н.А., Шмойлова Р.А. Анализ временных рядов и прогнозирование: Учебное пособие. М. – 2001. – 67 с.
14. Троянская М.А. Моделирование временных рядов налоговых поступлений адаптивными методами // *Вестник Оренбургского государственного университета*. – 2006. – № 8. – С. 268–274.
15. Христиановский В.В. Анализ временных рядов в экономике: практика применения: учебное пособие / В.В. Христиановский, В.П. Щербина. Донецк: ДонНУ, 2011. – 125 с.
16. Щербаков М.В., Бребельс А., Щербакова Н.Л., Тюков А.П. Обзор оценок качества моделей прогнозирования. – Режим доступа: http://www.mtas.ru/bitrix/components/bitrix/forum.interface/show_file.php?fid=6450 (дата обращения 25.09.2015), свободный. – Загл. с экрана. – Яз. русск.
17. Beliaeva N., Petrochenkov A., Bade K. Data set analysis of electric power consumption // *European researcher. Series A*. – 2013. – № 10–2 (61). – P. 2482–2487.
18. Fahimifard S.M., Homayonifar M., Sabouhi M. and Moghaddamnia A.R. Comparison of AN-FIS, ANN, GARCH and ARIMA techniques to exchange rate forecasting // *Journal of applied sciences*. – 2009. – № 9 (20). – P. 3641–3651.
19. Fat Codruta Maria, Dezsi Eva. Exchange-rates forecasting: exponential smoothing techniques and ARIMA models // *The Annals of the University of Oradea. Economic sciences*. – 2011. – Vol. XX. – № 1. – P. 499–508.
20. Maniatis Paraschos. Forecasting the exchange rate between Euro and USD: Probabilistic approach versus ARIMA and exponential smoothing techniques // *Journal of applied business research (JABR)*. – 2012. – Vol. 28. – № 2. – P. 171–192.
21. MathWorks Documentation. Econometrics Toolbox. Adftest. – Режим доступа <http://www.mathworks.com/help/econ/adftest.html> (дата обращения 26.08.2015), свободный (необходима предварительная регистрация). – Загл. с экрана. – Яз. англ.
22. Newaz M.K. Comparing the performance of time series models for forecasting exchange rate // *BRAC university journal*. – 2008. – Vol. V. – № 2. – P. 55–65.
23. Nwankwo Steve C. Autoregressive integrated moving average (ARIMA) model for exchange rate (Naira to Dollar) // *Academic journal of interdisciplinary studies*. – 2014. – Vol. 3. – № 4. – P. 429–433.
24. Poskitt D.S. and Tremayne A.R. Determining a portfolio of linear time series models. *Biometrika*. – 1987. – Vol. 74. – P. 125–137.
25. Sun Ya, Heng B.H., Seow Y.T., Seow E. Forecasting daily attendances at an emergency department to aid resource planning // *European journal of natural history*. – 2009. – № 3. – P. 31–40.

References

1. Balonishnikov A.M., Balonishnikova V.A., Kopyltsov A.V. *Prognozirovaniye vremennykh ryadov metodami Farmera–Sidorovicha i Boksa–Dzhenkinsa* [Prediction of time series by Box–Dzhenkins and Farmer–Sidorovich methods]. *Izvestiya Rossiyskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. A.I. Gercena* [Russian state teachers university named after A.I. Herzen proceedings], 2011, no. 141, pp. 7–16.
2. Boks Dzh., Dzhenkins G. *Analiz vremennykh ryadov. Prognoz I upravlenie* [Time series analysis: forecasting and control]. Moscow, 1974. 406 p.
3. Bryukov V.G. *Kak predskazat' kurs dollara. Effektivnye metody prognozirovaniya s ispol'zovaniem Excel i EvIEWS* [How one can forecast dollar's exchange rate. Efficient forecasting methods using Excel and EvIEWS]. Moscow, 2011. 272 p.
4. Dorokhov E.V. *Primeneniye adaptivnykh, ARIMA i ARCH metodov pri prognozirovanii kratkosrochnoy dinamiki rossiyskogo fondovogo rynka* [Using adaptive, ARIMA and ARCH methods in short-term forecasting of Russian equities market]. *Finansy i biznes* [Finances and business], 2007, no. 3, pp. 47–63.
5. Zeman R., Stuhly J. *Prognoznye modeli dlya akciiy "Erste Bank"* [Forecasting models for shares of "Erste Bank"]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta. Seriya: Ekonomika* [Astrakhan state technical university proceedings. Economics series], 2013, no. 2, pp. 104–111.
6. Kantorovich G.G. *Lekcii: Analiz vremennykh ryadov (lekcii 1–4)* [Time series analysis (lectures 1–4)]. *Ekonomicheskii zhurnal Vysshey shkoly ekonomiki* [Economic journal of High school of economics], 2002, vol. 6, no. 1, pp. 85–116.
7. Kantorovich G.G. *Lekcii: Analiz vremennykh ryadov (lekcii 5–7)* [Time series analysis (lectures 5–7)]. *Ekonomicheskii zhurnal Vysshey shkoly ekonomiki* [Economic journal of High school of economics], 2002, vol. 6, no. 2, pp. 251–273.
8. Mkhitaryan S.V., Danchenok L.A. *Prognozirovaniye prodazh s pomosh'yu adaptivnykh statisticheskikh metodov* [Sales forecast using adaptive statistical methods]. *Fundamental'nye issledovaniya* [Fundamental researches], 2014, no. 9–4, pp. 818–822.
9. Nosko V.P. *Ekonometrika. Kn. 1, Ch. 1, 2: uchebnik* [Econometrics. Book 1, Parts 1, 2: textbook]. Moscow, 2011. 672 p.
10. Nosko V.P. *Ekonometrika. Kn. 2, Ch. 3, 4: uchebnik* [Econometrics. Book 2, Parts 3, 4: textbook]. Moscow, 2011. 576 p.
11. Pilyugina A.V., Boiko A.A. *Opyt ispol'zovaniya apparata nechyotkikh mnozhestv v prognozirovanii valyutnogo kursa* [Experience with using fuzzy sets in forecasting of currency exchange rate]. *Prikaspiyskiy zhurnal: Upravlenie i Vysokie Tekhnologii* [Caspian Journal: Management and High Technologies], 2014, no. 3 (27), pp. 143–157.
12. Reznichenko E.V., Kochegurova E.A. *Metody kratkosrochnogo prognozirovaniya finansovykh rynkov* [Methods for financial markets' short-term forecasting]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta* [Tomsk Polytechnic university proceedings], 2007, no. 6, pp. 19–23.
13. Sadovnikova N.A., Shmoylova R.A. *Analiz vremennykh ryadov i prognozirovaniye: uchebnoe posobie* [Time series analysis and forecasting: Educational book]. Moscow, 2001. 67 p.
14. Troyanskaya M.A. *Modelirovaniye vremennykh ryadov nalogovykh postupleniy adaptivnymi metodami* [Tax revenues time series modelling using adaptive methods]. *Vestnik Orenburgskogo gosudarstvennogo universiteta* [Orenburg state university proceedings], 2006, no. 8, pp. 268–274.
15. Khristianovskiy V.V. *Analiz vremennykh ryadov v ekonomike: praktika primeneniya: uchebnoe posobie* [Time series analysis in economics: Practical approach. Educational book]. Donetsk, 2011. 125 p.
16. Shcherbakov M.V., Brebels A., Shcherbakova N.L., Tyukov A.P. *Obzor ocenok kachestva modeley prognozirovaniya* [A Survey of forecast error measures]. *World Applied Sciences Journal (Information Technologies in Modern Industry, Education & Society)*, 2013, no. 24, pp. 171–176.
17. Beliaeva N., Petrochenkov A., Bade K. *Data Set Analysis of electric power consumption. European researcher. Series A*, 2013, no. 10–2 (61), pp. 2482–2487.
18. Fahimifard S.M., Homayonifar M., Sabouhi M. and Moghaddamnia A.R. *Comparison of AN-FIS, ANN, GARCH and ARIMA Techniques to exchange rate forecasting. Journal of applied sciences*, 2009, no. 9 (20), pp. 3641–3651.

19. Fat Codruta Maria, Dezsi Eva. Exchange-rates forecasting: exponential smoothing techniques and ARIMA models. The annals of the University of Oradea. Economic sciences, 2011, vol. XX, no. 1, pp. 499–508.

20. Maniatis Paraschos. Forecasting the exchange rate between Euro and USD: probabilistic approach versus ARIMA and exponential smoothing techniques. Journal of applied business research (JABR), 2012, vol. 28, no. 2, pp. 171–192.

21. MathWorks Documentation. Econometrics Toolbox. Adftest. Available at: <http://www.mathworks.com/help/econ/adftest.html> (accessed 26 August 2015).

22. Newaz M.K. Comparing the performance of time series models for forecasting exchange rate. BRAC University journal, 2008, vol. V, no. 2, pp. 55–65.

23. Nwankwo Steve C. Autoregressive integrated moving average (ARIMA) model for exchange rate (Naira to Dollar). Academic journal of interdisciplinary studies, 2014, vol. 3, no. 4, pp. 429–433.

24. Poskitt D.S., Tremayne A.R. Determining a portfolio of linear time series models. Biometrika, vol. 74, 1987, pp. 125–137.

25. Sun Ya, Heng B.H., Seow Y.T., Seow E. Forecasting daily attendances at an emergency department to aid resource planning. European journal of natural history, 2009, no. 3, pp. 31–40.