

2. Dodonov A. G., Putyatin V. G. Nazemnye opticheskie, optiko-elektronnye i lazerno-televizionnye sredstva traektornykh izmereniy [Land optical, optical-electronic and laser and television means of trajectory measurements]. *Matematicheskiye mashiny i sistemy* [Mathematical Cars and Systems], 2017, no. 4, pp. 30–56.

3. Zhdanyuk B. F. *Osnovy statisticheskoy obrabotki traektornykh izmereniy* [Fundamentals of statistical processing of trajectory measurements]. M., Sovetskoe radio Publ., 1978. 384 p.

4. Krupskiy K. A. Radionov N. V. Metodika otsenivaniya parametrov dvizheniya obekta ispytaniya na konechnom uchastke traektorii poleta [Methods of estimation of motion parameters of the test object in the terminal phase of trajectory]. *Trudy VoЕННО-kosmicheskoy akademii imeni A.F. Mozhayskogo* [Proceedings of Military Space Academy of A.F. Mozhaysky], 2018, no. 661, p. 53–60.

5. Mitrofanov E. I., Volotov E. M., Mitrofanov I. V. Model opticheskogo sredstva traektornykh izmereniy v informatsionnom obespechenii processa ispytaniy aviacionnoy tekhniki i vooruzheniya [Model of optical means of trajectory measurements in the information support of the process of testing aircraft and weapons]. *Modelirovaniye aviacionnykh sistem materialy Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferencii* [Modeling aircraft systems materials of the All-Russian Scientific and Practical Conference], 2013, p. 100.

6. Mitrofanov E. I., Volotov E. M., Efimov N. A., Mitrofanov I. V. Sistema obrabotki informatsii materialov video-registratsii pri ispytaniyakh obraztsov aviatsionnoy tekhniki i vooruzheniya [The system of information processing of materials of video registration when testing samples of the aircraft equipment and arms]. *Nadezhnost i kachestvo : trudy mezhdunarodnogo simpoziuma* [Reliability and quality: Proceedings of the International Symposium], 2014, no. 2, pp. 10–15.

7. Ogorodniy chuk N. D. *Obrabotka traektornoy informatsii. Chast I: Metody realizatsii prostranstvennoy (strukturnoy, parametricheskoy) izbytochnosti izmereniy pri reshenii nelineynykh zadach kontrolya nedeterminirovannykh traektoriy* [Processing of trajectory information. Part I: Methods for implementing spatial (structural, parametric) measurement redundancy in solving nonlinear control problems of non-deterministic trajectories]. Kiev, 1981. 141 p.

8. Chernukha V. N., Novokshonov Yu. V., Plyaskota S. I. *Osnovy ispytaniy aviatsionnoy tekhniki. Chast vtoraya* [Basics of aeronautical engineering testing. Part two]. Moscow, VVIA named after prof. N.E. Zhukovsky, 1994. 334 p.

9. Chupahin A. P., Luckov Yu. I. Pogreshnosti videoapparatury pri provedenii traektornykh izmereniy [Video equipment errors when carrying out trajectory measurements]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki* [News of the Tula State University. Technical Science], 2014, no. 9–1, pp. 120–126.

10. Chupahin A. P., Savin M. L. Otsenka skorosti poleta malyykh letatelnykh apparatov s pomoshchyu videoapparatury [Assessment of the speed of flight small flying devices by means of a videoapparatus]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki* [News of the Tula State University. Technical Science], 2014, no. 9–1, pp. 126–130.

11. Shibanov G. P. Ispytaniya aviatsionnoy tekhniki [Tests of aviation technology]. *Problemy bezopasnosti poletov* [Problems of Flight Safety], 2008, no. 4. pp. 36–44.

УДК 004.942+681.5

РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ШАГАЮЩЕГО РОБОТА НА ОСНОВЕ ОБРАТНОГО МАЯТНИКА С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ¹

Статья поступила в редакцию 29.01.2019, в окончательном варианте – 12.02.2019.

Рядчиков Игорь Викторович, Кубанский государственный университет, 350040, Российская Федерация, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149,

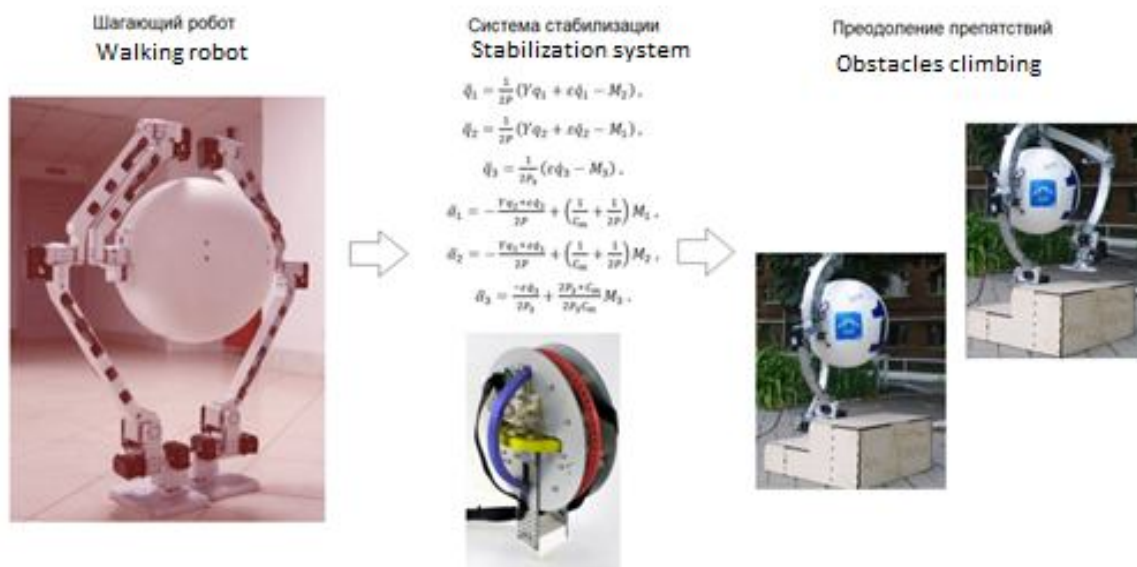
кандидат физико-математических наук, руководитель лаборатории робототехники и мехатроники, https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=734544, e-mail: igorriyadchikov@gmail.com

Наряду с развитием мобильной робототехники в направлении летающих и колесных конструкций, в последнее время активно ведутся исследования в области шагающих устройств. Это вызвано широкой областью их применения: перемещение с преодолением препятствий и по сложным траекториям; необходимость перемещения робототехнического устройства в труднодоступные места. Особенностью шагающих роботов является то, что в моменты перемещения «ног» необходимо стабилизировать неустойчивую систему. Существует два подхода к стабилизации. Первый заключается в попытке стабилизировать объект по аналогии с движениями человека или животного, второй – использование неантропоморфных методов. В данной работе рассмотрена неантропоморфная конструкция шагающей робототехнической платформы, стабилизируемой с применением вращающихся маховиков. В статье решена задача стабилизации рассматриваемого устройства с использованием модели обратного трехмерного маятника. Приведены результаты сравнения решения указанной задачи с известным аналитическим решением. Представлены аналитические, численные и экспериментальные результаты.

Ключевые слова: шагающий робот, проблемы стабилизации, обратный трехмерный маятник, аналитические решения, экспериментальные результаты, имитационное моделирование

¹ Работа выполнена в рамках госзадания Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 8.2321.2017/ПЧ «Разработка и адаптация систем управления компенсацией динамических отклоняющих воздействий на мобильные объекты, находящиеся в состоянии динамического равновесия»).

Графическая аннотация (Graphical annotation)



DEVELOPMENT OF A STABILIZATION SYSTEM FOR A WALKING ROBOT ON THE BASIS OF THE INVERTED PENDULUM WITH THREE DEGREE OF FREEDOM

The article was received by editorial board on 29.01.2019, in the final version – 12.02.2019.

Ryadchikov Igor V., Kuban State University, 149 Stavropolskaya St., Krasnodar, 350040, Russian Federation

Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Head of the Laboratory of Robotics and Mechatronics, https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=734544, e-mail: igorryadchikov@gmail.com

Along with the development of mobile robotics in the direction of flying and wheeled structures, the research in the field of walking devices is being actively conducted. This is due to the wide range of applications of walking devices, including moving with obstacles climbing and along complex trajectories; the need to move the robotic device in hard-to-reach places. The peculiarity of walking robots is that at the moment of moving the "legs" it is necessary to stabilize the unstable system. There are two approaches to stabilization. The first is an attempt to stabilize the object by analogy with the movements of a human or animal, the second is the use of non – anthropomorphic methods. In this paper, we consider the non-anthropomorphic design of a walking robotic platform stabilized using rotating flywheels. The article deals with the problem of stabilization of the considered device using the model of the inverted three-dimensional pendulum. Results of comparison of the solution of the problem with the known analytical solution are given. Analytical, numerical and experimental results are presented.

Key words: walking robot, stabilization problems, inverted 3d pendulum, analytical solutions, experimental results, simulation

Введение. Применение колесного или гусеничного перемещения в мобильной робототехнике приводит к сложностям на пересеченной местности, при подъеме на ступеньки и при работе в пространстве с большим количеством препятствий [13]. Данное затруднение особенно нежелательно при использовании мобильных роботов в опасных условиях, под землей или в районах, где требуется сохранить первозданный ландшафт. В связи с этим в последние годы множество исследований нацелено на изучение конструктивных особенностей и реализацию шагающих роботов [10], способных демонстрировать устойчивость при преодолении крутых углов [5]. Это позволяет использовать их при проведении спасательных операций [22], при решении промышленных задач транспортировки грузов. Опубликованы также работы по колесно-шагающим робототехническим системам (Воротников и др.).

Современные исследования [24], посвященные проектированию шагающих роботов, относятся к следующим направлениям: системы управления и стабилизации высокой сложности, обеспечение энергоэффективности и достаточной скорости передвижения, снижение стоимости компонентов робота; использование систем технического зрения и иных средств для обнаружения препятствий, оценки их формы и размеров.

Основой организации перемещения шагающих систем являются принципы, используемые при передвижении человеком и животными: шаг, бег, прыжки [21]. Можно выделить следующие конструктивные классы шагающих роботов: человекоподобные роботы, использующие собственные колебания для снижения энергозатрат, однако представляющие сложность в стабилизации центра масс, вследствие сложной геометрии

таких роботов; шестиногие платформы с разнообразными шасси [22]; системы, повторяющие прыжки кенгуру [15], трехногие системы [6], четырехногие [4] и др. Несмотря на широкий класс потенциальных биологических прототипов шагающих систем, наибольший интерес для создания роботов, способных эффективно решать задачи в сочетании с людьми, представляют именно двуногие роботы.

Независимо от конструкций шагающих роботов, все подобные машины должны стабилизировать свое тело в пространстве во время ходьбы. При совершении каждого шага тело двуногого робота подвергается воздействию механических сил, стремящихся опрокинуть его. Существует два подхода к обеспечению стабильности двуногого робота при ходьбе. Первый подход связан с изучением биологического прототипа на примере человека и его «повторением» в рамках технической системы. Люди используют возможности вестибулярного аппарата, зрения, головного мозга и позвоночных суставов при ходьбе, чтобы поддерживать устойчивое положение. Такая система стабилизации называется антропоморфной. Другой подход к проблеме динамической стабилизации заключается в разработке неантропоморфных систем динамической стабилизации. В таких системах существует дополнительный источник стабилизирующей силы, например, гироскоп или вращающийся маховик, который прикладывает эту силу, чтобы вернуть тело робота в устойчивое положение. Сам робот при этом рассматривается в виде удобной для синтеза системы управления и адекватной механической модели, например, модели обратного маятника, оснащенной стабилизирующим блоком.

В статье решается актуальная задача стабилизации шагающего робота трехмерным маховиком на основе использования модели трехмерного обратного маятника и приводится сравнение энергоэффективности полученного решения с ранее известным аналитическим решением Cubli. Приведенное в статье решение является более энергоэффективным.

Принципы управления. Оперативное управление роботом подразумевает дискретный контроль на нескольких *уровнях состояния* робота, как на внутреннем уровне, так и относительно окружающего пространства. Можно также выделить несколько *уровней контроля*:

1. Управление актуаторами предполагает управление внутренними состояниями приводов, обеспечивающих движение (перемещение) робота в пространстве.
2. Управление динамикой состояния обеспечивает устойчивость робота при выполнении перемещений.
3. Управление перемещениями обеспечивает их целенаправленный характер, в том числе обход тех препятствий, которые шагающий робот не в состоянии преодолеть [2].
4. Управление заданием обеспечивает выполнение высокоуровневых функциональных задач, включая, например, планирование маршрута перемещения в условиях изменения окружающей обстановки [2].

Каждый из вышеприведенных уровней предполагает разные подходы к реализации, многие из которых являются в достаточной степени вычислительно сложными. Коммутация между уровнями и обратные связи внутри контуров управления как на физическом, так и на информационном уровнях могут иметь несколько решений. При этом обработка данных для реализации обратной связи может осуществляться с использованием алгоритмов разной вычислительной сложности.

Таким образом, задача синтеза оперативного управления роботом в общем случае имеет множество путей решения, не имеющих общего систематического описания.

Существует достаточно широкий спектр методов получения стабильного движения роботов «шагом» на двух опорах – ногах. С одной стороны спектра – гуманоидный тип, то есть роботы, строение которых приближено к человеческой морфологии. Этот класс роботов включает в себя многие известные робототехнические платформы, такие как ASIMO Honda, HRP-2 и Johnnie [11, 12, 19]. Алгоритмы управления, используемые в таких роботах, основаны на эвристике, в частности, на методе, известном как точка нулевого момента (ZMP) [23]. Он сводится к удержанию строго внутри периметра опоры центра давления сил реакции опоры на механизм. Это приводит к квазистатически устойчивой (плоская постановка стопы при шаге) ходьбе, а не динамически стабильной (такая ходьба иногда характеризуется как «контролируемое падение»).

На другом конце спектра возможных технических решений находятся минималистичные двуногие роботы – в них динамическая стабильность достигается (насколько это возможно) через использование кинематики конструкции при отсутствии управления по обратной связи [8, 14]. Создание таких двуногих шагающих конструкций в целом мотивировано результатами работ McGeer [16]. В них автор проанализировал и сконструировал планарные, пассивные, т.е. без актуации, двуногие шагающие аппараты. Они способны устойчиво ходить по ровной поверхности – горизонтальной или с небольшим уклоном. Впоследствии, как, например, описано в [7], роботы, построенные на этом общем принципе, были модернизированы путем добавления возможности актуирования с небольшими энергиями управления. В результате была получена «человекоподобная» походка робота. Однако «расплатой» за выдающуюся эргономичность и энергоэффективность этих двуногих роботов являются слабые возможности решения задач, отличных от ходьбы с фиксированной скоростью – такие устройства не способны совершить подъем по лестнице, замереть, повернуться или бежать.

Большинство исследований динамической роботизированной стабилизации движения лежат между этими двумя крайностями.

Общая характеристика конструкции. В Кубанском государственном университете создается шагающий робот AnyWalker [17, 18]. Его конструкция включает в себя шар диаметром 340 мм, который является основой шагающего робота и рассматривается как перевернутый маятник с маховиками [3]. Схема конструкции приведена на рисунке 1. Она содержит три маховика с одинаковыми тензорами инерции и одинаковыми массами. Эти маховики расположены попарно перпендикулярно, и все они имеют общий центр в точке «Ц» (рис. 1б). Обратный маятник может свободно вращаться вокруг своей точки опоры, т.е. в точке опоры он имеет три степени свободы. Точка опоры «О» (рис. 1б) и общий центр «Ц» маховиков расположены на оси симметрии конструкции.

На рисунке 1в изображена опытная установка, соответствующая аппаратной реализации перевернутого трехмерного (3D) маятника. В качестве основного контроллера мы использовали STM32F407, он запрашивает акселерометры/гироскопы на базе IMU6050 по шине i2c и фильтрует данные с помощью алгоритма слияния датчиков Madgwick. Маховики управляются усилителем крутящего момента Maxon EPOS2 50/5, для привода колес используются три плоских двигателя Maxon EC45.

Габариты опоры (ноги) робота приведены на рисунке 2.

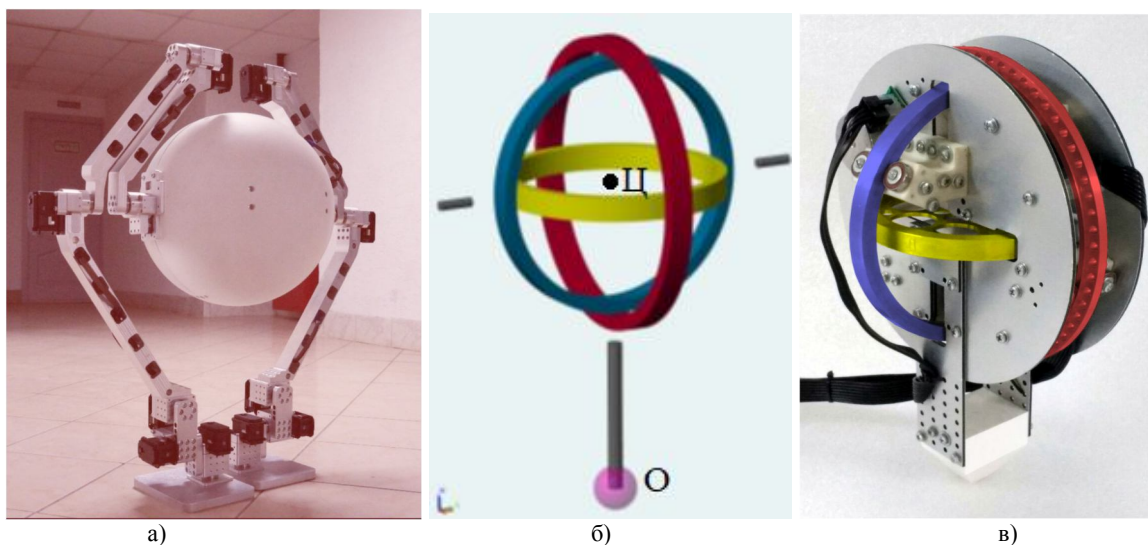


Рисунок 1 – Конструкция шагающего робота: а) внешний вид; б) модель системы стабилизации в виде трехмерного обратного маятника; в) аппаратная реализация системы стабилизации

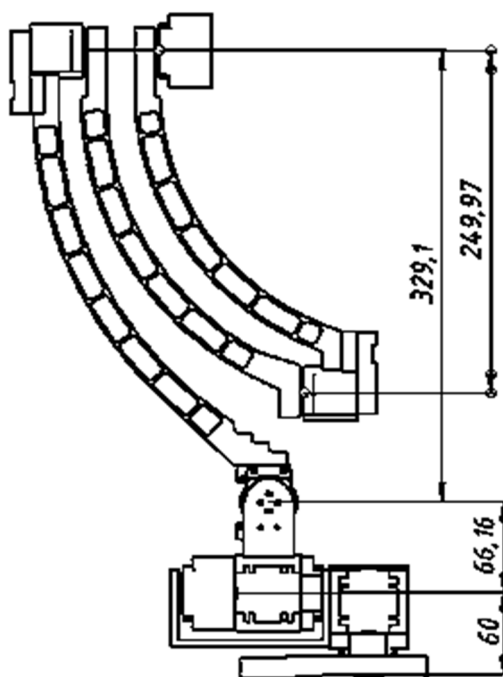


Рисунок 2 – Опора (нога) робота (мм)

Система стабилизации на основе использования обратного маятника с тремя степенями свободы. Рассмотрим работу системы стабилизации шагающего робота трехмерным (3D) обратным маятником. Он представляет собой хорошую базовую модель для разработки системы динамической стабилизации двуногой ходьбы для неантропоморфного робота.

Параметры системы: C – момент инерции маятника без маховиков относительно его оси симметрии; A – момент инерции маятника без маховиков относительно любой оси, перпендикулярной оси симметрии, проходящей через опору маятника; A_m – момент инерции маховика относительно любой оси, перпендикулярной его оси вращения и проходящей через точку U ; C_m – момент инерции маховика относительно его оси вращения; m – масса одного маховика; l – расстояние от точки опоры до центров маховиков; b – расстояние от центра масс маятника без маховиков до точки опоры; M – масса маятника без маховиков.

Все применяемые далее системы координат являются правыми декартовыми системами координат. Будем пользоваться следующими системами координат: неподвижной относительно Земли и «вмороженной» в маятник. Неподвижная система координат имеет начало в точке «0» на опоре маятника. Положение осей неподвижной относительно Земли системы координат уточним позднее, когда будем выводить формулу для потенциала силы притяжения. «Вмороженная» в маятник система координат, так же как и неподвижная, имеет начало в точке «0». Третья ось вмороженной системы все время является осью симметрии маятника.

Положение «вмороженной» системы относительно неподвижной будем определять, пользуясь углами Эйлера [1, с. 92]: ψ – угол прецессии; θ – угол нутации; φ – угол собственного вращения [1, с. 92].

При этом оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{SO}(3)$, который отображает векторы i_1, i_2, i_3 базиса неподвижной системы в векторы базиса «вмороженной» системы e_1, e_2, e_3 , может быть задан таким образом:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(1)}\mathcal{A}^{(2)}\mathcal{A}^{(3)},$$

где операторы $\mathcal{A}^{(1)}, \mathcal{A}^{(2)}, \mathcal{A}^{(3)}$ таковы, что их матрицы в базисе i_1, i_2, i_3 имеют вид:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, A^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица оператора \mathcal{A} в базисе i_1, i_2, i_3 выглядит следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & -\cos\psi\sin\varphi - \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\psi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\cos\psi\cos\theta - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Характеристика математического аппарата, применяемого в системе стабилизации движения. Пусть ω – угловая скорость вращения «вмороженной» системы относительно неподвижной. В базисе e_1, e_2, e_3 угловая скорость имеет вид $\omega = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3$, где

$$\omega_1 = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$

$$\omega_2 = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$

$$\omega_3 = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}.$$

Формулы для $\omega_k, k = \overline{1,3}$ взяты из [1].

Обозначим через T_0 кинетическую энергию маятника без кинетической энергии маховиков. Известно, что

$$T_0 = \frac{1}{2} \omega \cdot J(\omega),$$

где J – оператор инерции маятника без маховиков. В «вмороженной» системе координат он имеет следующую матрицу $J = \text{diag}(A, A, C)$, здесь A и C – константы-параметры системы. Тогда кинетическая энергия системы запишется в виде:

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} C\omega_3^2 = \\ &= \frac{1}{2} A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2. \end{aligned}$$

Назовем k -м маховиком тот, ось вращения которого параллельна вектору j_k . Его кинетическую энергию будем обозначать как T_k , а его оператор инерции относительно точки Π – $J_k, k = 1, 2, 3$. Здесь

$$(e_1 \ e_2 \ e_3) = (j_1 \ j_2 \ j_3)B \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где ортогональная матрица $B = ||b||^{3 \times 3}$ задает положение базиса $(j_1 \ j_2 \ j_3)$ относительно базиса $(e_1 \ e_2 \ e_3)$. Рассмотрим два варианта для выбора матрицы B . В первом – выбираем единичную матрицу B . Во втором – используем известный механизм стабилизации, реализованный в Cubli [9]:

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В явном виде «Cubli»-замена базиса имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 &= \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{e}_1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_1 &= \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{j}_1 - \sqrt{\frac{1}{6}}\mathbf{j}_2 - \sqrt{\frac{1}{6}}\mathbf{j}_3, \\ \mathbf{j}_2 &= -\sqrt{\frac{1}{6}}\mathbf{e}_1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\mathbf{e}_2 - \sqrt{\frac{1}{3}}\mathbf{e}_3, & \text{или} & \quad \mathbf{e}_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}\mathbf{j}_2 - \sqrt{\frac{1}{2}}\mathbf{j}_3, \\ \mathbf{j}_3 &= -\sqrt{\frac{1}{6}}\mathbf{e}_1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\mathbf{e}_2 - \sqrt{\frac{1}{3}}\mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_3 &= -\sqrt{\frac{1}{3}}\mathbf{j}_1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\mathbf{j}_2 - \sqrt{\frac{1}{3}}\mathbf{j}_3. \end{aligned}$$

В каждом из случаев элементы $b_{ij}, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$ связаны с базисами соотношениями

$$\mathbf{j}_i = \sum_{j=1}^3 b_{ij}\mathbf{e}_j, i = \overline{1,3}.$$

Тогда по теореме Кёнига [1, § 5.2] имеем

$$T_k = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} + \dot{\alpha}_k\mathbf{j}_k) \cdot \mathcal{J}_k(\boldsymbol{\omega} + \dot{\alpha}_k\mathbf{j}_k) + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_{\Pi}^2,$$

где $\dot{\alpha}_k$ – скорость вращения k -го маховика относительно обратного маятника.

Рассмотрим систему координат с началом в точке Π , оси которой заданы направляющими ортами $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$. В этой системе матрицы операторов $\mathcal{J}_k, k = \overline{1,3}$ имеют следующий вид:

$$\mathcal{J}_1 = \text{diag}(C_m, A_m, A_m), \quad \mathcal{J}_2 = \text{diag}(A_m, C_m, A_m), \quad \mathcal{J}_3 = \text{diag}(A_m, A_m, C_m),$$

где A_m, C_m – параметры маховиков. Учитывая равенства

$$\mathbf{v}_{\Pi} = \boldsymbol{\omega} \times O\Pi = \boldsymbol{\omega} \times l\mathbf{e}_3,$$

здесь l – длина $O\Pi$, получим

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} + \dot{\alpha}_k\mathbf{j}_k) \cdot \mathcal{J}_k(\boldsymbol{\omega} + \dot{\alpha}_k\mathbf{j}_k) + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times l\mathbf{e}_3)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} + \dot{\alpha}_k\mathbf{j}_k) \cdot \mathcal{J}_k(\boldsymbol{\omega} + \dot{\alpha}_k\mathbf{j}_k) + \frac{1}{2}ml^2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3)^2. \end{aligned}$$

Для нахождения полной кинетической энергии конструкции сложим результаты предыдущих вычислений:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=0}^3 T_k = T_0 + \frac{3}{2}ml^2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3)^2 + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} + \dot{\alpha}_k\mathbf{j}_k) \cdot \mathcal{J}_k(\boldsymbol{\omega} + \dot{\alpha}_k\mathbf{j}_k) = \\ &= T_0 + \frac{3}{2}ml^2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^3 \boldsymbol{\omega} \cdot \mathcal{J}_k(\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k^2\mathbf{j}_k \cdot \mathcal{J}_k(\mathbf{j}_k) + \sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k\boldsymbol{\omega} \cdot \mathcal{J}_k(\mathbf{j}_k). \end{aligned}$$

Заметим, что справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}ml^2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3)^2 &= \frac{3}{2}ml^2(\omega_1^2 + \omega_2^2), \\ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^3 \boldsymbol{\omega} \cdot \mathcal{J}_k(\boldsymbol{\omega}) &= \frac{1}{2}(2A_m + C_m)\boldsymbol{\omega}^2, \\ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k^2\mathbf{j}_k \cdot \mathcal{J}_k(\mathbf{j}_k) &= \frac{1}{2}C_m\sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k^2, \\ \sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k\boldsymbol{\omega} \cdot \mathcal{J}_k(\mathbf{j}_k) &= C_m\sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{j}_k = C_m\sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k\Omega_k. \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы использовали обозначение $\Omega_k = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{j}_k, k = \overline{1,3}$.

Применяя указанные четыре соотношения (а также обозначение в виде Ω_k), перепишем полученное выражение для полной кинетической энергии конструкции в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2}A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}C\omega_3^2 + \frac{3}{2}ml^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}(2A_m + C_m)\boldsymbol{\omega}^2 + \frac{1}{2}C_m\sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k^2 + C_m\sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k\Omega_k.$$

Преобразовав, окончательно получим:

$$T = \left(\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}ml^2 + A_m + \frac{1}{2}C_m\right)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \left(\frac{1}{2}C + A_m + \frac{1}{2}C_m\right)\omega_3^2 + \frac{1}{2}C_m \sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k^2 + C_m \sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k \Omega_k,$$

где $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2$, $\omega_3^2 = (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2$.

Выберем направления осей неподвижной системы координат так, чтобы направление гравитационного поля Земли совпадало с отрицательным направлением оси Ox , т.е. вдоль $-\mathbf{i}_1$. Тогда потенциальная энергия конструкции такова:

$$\Pi = (3ml + bM)g \sin \psi \sin \theta.$$

Верхнее (неустойчивое) положение равновесия описывается точками следующей линии: $\psi = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}$, угол φ произволен. В дальнейшем нас будет интересовать только точка равновесия $\psi = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0$.

Выберем следующие обобщенные координаты:

$$q_1 = \psi - \frac{\pi}{2}, q_2 = \theta - \frac{\pi}{2}, q_3 = \varphi,$$

$$q_4 = \alpha_1, q_5 = \alpha_2, q_6 = \alpha_3,$$

где ψ, θ, φ – углы Эйлера, введенные выше, а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – углы поворота соответственно первого, второго и третьего маховиков. Соответствующие обобщенные силы обозначим: $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$.

Пусть \mathbf{M}_k – момент, развиваемый двигателем k -го маховика. Причем $\mathbf{M}_k = M_k \mathbf{j}_k$. Будем считать, что $M_k = c_u u_k - c_v \dot{\alpha}_k$, где c_u и c_v – параметры двигателя, u_k – напряжение, подаваемое на двигатель (посредством изменения этого параметра осуществляется управление). Таким образом, на k -й маховик будет действовать активный момент \mathbf{M}_k . В точке опоры «О» на обратный маятник действует момент силы трения $\mathbf{M}_{\text{тр}} = \varepsilon \boldsymbol{\omega}$, где ε – отрицательная константа (коэффициент вязкого трения). В целом на обратный маятник будет действовать активный момент $\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_{\text{тр}} - \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_3$.

Придадим системе виртуальное перемещение

$$\delta q = (\delta q_1, \dots, \delta q_6) = (\delta \psi, \dots, \delta \alpha_3),$$

такое, что только $\delta q_4 = \delta \alpha_1 \neq 0$. При этом элементарная работа $\delta A = \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{j}_1 \delta \alpha_1 = M_1 \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_1 \delta \alpha_1 = M_1 \delta \alpha_1$. Аналогично при (только)

$$\delta \alpha_k = \delta q_{k+3} \neq 0$$

получим $\delta A = M_k \delta \alpha_k, k = 2, 3$.

Если возьмем виртуальное перемещение, при котором $\delta \alpha_1 = \delta \alpha_2 = \delta \alpha_3 = 0$, то элементарная работа, совершаемая активными силами, равна:

$$\delta A = \varepsilon(\dot{q}_1 - \dot{q}_3 \sin q_2) \delta q_1 + \varepsilon \dot{q}_2 \delta q_2 + \varepsilon(\dot{q}_3 - \dot{q}_1 \sin q_2) \delta q_3.$$

Следовательно, обобщенные силы таковы: $Q_1 = \varepsilon(\dot{q}_1 - \dot{q}_3 \sin q_2)$, $Q_2 = \varepsilon \dot{q}_2$, $Q_3 = \varepsilon(\dot{q}_3 - \dot{q}_1 \sin q_2)$, $Q_4 = M_1$, $Q_5 = M_2$, $Q_6 = M_3$.

На произвольном виртуальном перемещении δq элементарная работа определяется выражением:

$$\delta A = \sum_{i=1}^6 Q_i \delta q_i.$$

Уравнения движения запишем, используя Лагранжев формализм, см. например [12]. Лагранжиан L определяется формулой $L = T - \Pi$.

Сначала запишем уравнение Лагранжа второго рода по координате α_1 :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = Q_4,$$

заметим, что $\frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = 0$, так как L не зависит от α_1 . Тогда получим

$$C_m \frac{d}{dt} (\dot{\alpha}_1 + \Omega_1) = M_1, \tag{3}$$

Аналогично для α_2 и α_3 получаем следующие уравнения:

$$C_m \frac{d}{dt} (\dot{\alpha}_2 + \Omega_2) = M_2, \tag{4}$$

$$C_m \frac{d}{dt} (\dot{\alpha}_3 + \Omega_3) = M_3. \tag{5}$$

Запишем уравнение Лагранжа второго рода по первым трем обобщенным координатам

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1,3}. \tag{6}$$

Запишем уравнения (6) в явном виде. Для упрощения выкладок введем обозначение:

$$w = \left(\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}ml^2 + A_m + \frac{1}{2}C_m\right)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \left(\frac{1}{2}C + A_m + \frac{1}{2}C_m\right)\omega_3^2,$$

где w – кинетическая энергия всей конструкции с неподвижными относительно маятника маховиками.

Выпишем формулы для всех производных, входящих в уравнение (6):

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial w}{\partial \dot{q}_i} + C_m \sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_i}, i = \overline{1,3}, \\ \frac{\partial L}{\partial q_i} &= \frac{\partial w}{\partial q_i} + C_m \sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, i = \overline{1,3}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w}{\partial \dot{q}_i} + C_m \sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_i} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 w}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 w}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + C_m \left(\sum_{k=1}^3 \ddot{\alpha}_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_i} \right).\end{aligned}$$

Исключим из последнего выражения $\ddot{\alpha}_k$, пользуясь равенствами (3)–(5)

$$\ddot{\alpha}_j = \frac{M_j}{C_m} - \frac{d}{dt} \Omega_j = \frac{M_j}{C_m} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Omega_j}{\partial q_k} \dot{q}_k - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Omega_j}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k, j = \overline{1,3}$$

Получим

$$\begin{aligned}& \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 w}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k - C_m \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_i} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial w}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} \dot{q}_k + \\ & C_m \left(\sum_{k=1}^3 \left(\frac{M_k}{C_m} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \Omega_k}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j \right) - \\ & \left(\frac{\partial w}{\partial q_i} + C_m \sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right) = Q_i, i = \overline{1,3}.\end{aligned}\quad (7)$$

Система уравнений (3)–(5), (7) является полной системой уравнений движения рассматриваемой конструкции.

Приведем полученные уравнения движения к нормальному виду. Начнем с уравнений (7) и перепишем их в виде

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} - C_m \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_j} \right)_{i,j} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix},\quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}F_i &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 w}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} \dot{q}_k + C_m \left(\sum_{k=1}^3 \left(\frac{M_k}{C_m} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \Omega_k}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j \right) \\ & - \left(\frac{\partial w}{\partial q_i} + C_m \sum_{k=1}^3 \dot{\alpha}_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right) - Q_i, \quad i = \overline{1,3}.\end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить матрицу $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} - C_m \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_j} \right)_{i,j}$, сначала посчитаем матрицу

$$\left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_j} \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \Omega_3}{\partial \dot{q}_1} \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial \dot{q}_2} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial \dot{q}_2} & \frac{\partial \Omega_3}{\partial \dot{q}_2} \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial \dot{q}_3} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial \dot{q}_3} & \frac{\partial \Omega_3}{\partial \dot{q}_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial \Omega_3}{\partial \dot{q}_j} \end{pmatrix}_{i,j}.$$

Покажем, что выполняется равенство

$$\left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_j} \right) = \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_j} \right).\quad (9)$$

Действительно для угловой скорости обратного маятника имеем:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 = \Omega_1 \mathbf{j}_1 + \Omega_2 \mathbf{j}_2 + \Omega_3 \mathbf{j}_3.$$

Учитывая связь (1) между базами, получим $\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$. Продифференцировав это соотношение по $\dot{q}_j, j = \overline{1,3}$, получим:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial \Omega_3}{\partial \dot{q}_j} \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{q}_j} \end{pmatrix}.$$

Тогда для каждого i, j выполнено соотношение

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{q}_j} \end{pmatrix}^T (b_{ik})(b_{ik})^T \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{q}_j} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_j},$$

что устанавливает справедливость (9). Правая часть выражения (9) поддается непосредственному вычислению. Используя найденные выше соотношения, находим:

$$\left(\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_j} \right)_{k,j} = \begin{pmatrix} \cos q_2 \sin q_3 & \cos q_3 & 0 \\ \cos q_2 \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 \\ -\sin q_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Скалярные произведения столбцов этой матрицы:

$$\left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_j} \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin q_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Нам осталось вычислить матрицу $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)_{ij}$. Это делается непосредственным дифференцированием выражения

$$w = \left(P + \frac{1}{2} C_m \right) (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \left(P_3 + \frac{1}{2} C_m \right) \omega_3^2,$$

где $P = \frac{1}{2} A + \frac{3}{2} m l^2 + A_m$, $P_3 = \frac{1}{2} C + A_m$.

$$\begin{aligned} w &= \left(P + \frac{1}{2} C_m \right) (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \left(P_3 + \frac{1}{2} C_m \right) (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi})^2 = \\ &= \left(P + \frac{1}{2} C_m \right) (\dot{q}_1^2 \sin^2 \left(q_2 + \frac{\pi}{2} \right) + \dot{q}_2^2) + \left(P_3 + \frac{1}{2} C_m \right) (\dot{q}_1 \cos \left(q_2 + \frac{\pi}{2} \right) + \dot{q}_3)^2 = \\ &= \left(P + \frac{1}{2} C_m \right) (\dot{q}_1^2 \cos^2 q_2 + \dot{q}_2^2) + \left(P_3 + \frac{1}{2} C_m \right) (-\dot{q}_1 \sin q_2 + \dot{q}_3)^2. \end{aligned}$$

Окончательно получим:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} - C_m \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{q}_j} \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} 2P \cos^2 q_2 + 2P_3 \sin^2 q_2 & 0 & -2P_3 \sin q_2 \\ 0 & 2P & 0 \\ -2P_3 \sin q_2 & 0 & 2P_3 \end{pmatrix},$$

где $P = \frac{1}{2} A + \frac{3}{2} m l^2 + A_m$, $P_3 = \frac{1}{2} C + A_m$.

Решая систему (8) относительно старших производных, получим уравнения (7) в нормальном виде:

$$\ddot{q}_1 = -\frac{1}{2P \cos^2 q_2} (F_1 + F_3 \sin q_2), \tag{10}$$

$$\ddot{q}_2 = -\frac{1}{2P} F_2, \tag{11}$$

$$\ddot{q}_3 = -\frac{1}{2P_3} \left(F_1 \frac{P_3 \sin q_2}{P \cos^2 q_2} + F_3 \left(1 + \frac{P_3 \sin^2 q_2}{P \cos^2 q_2} \right) \right). \tag{12}$$

Далее обозначим правые части уравнений (10)–(12) G_1, G_2, G_3 :

$$G_1 = -\frac{1}{2P \cos^2 q_2} (F_1 + F_3 \sin q_2), \quad G_2 = -\frac{1}{2P} F_2,$$

$$G_3 = -\frac{1}{2P_3} \left(F_1 \frac{P_3 \sin q_2}{P \cos^2 q_2} + F_3 \left(1 + \frac{P_3 \sin^2 q_2}{P \cos^2 q_2} \right) \right).$$

Воспользовавшись этими обозначениями, перепишем уравнения (3)–(5) в нормальном виде:

$$\ddot{q}_j = \frac{M_j}{C_m} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Omega_j}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Omega_j}{\partial \dot{q}_k} G_k, \quad j = \overline{1,3}. \tag{13}$$

Уравнения (10)–(13) представляют собой уравнения движения в нормальной форме.

Для сокращения записи формул введем обозначение $Y = (3ml + Mb)g$.

Линеаризацию уравнений движения (10)–(13) будем проводить в окрестности точки равновесия:

$$q_1 = q_2 = q_3 = \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = \dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha}_3 = M_1 = M_2 = M_3 = 0.$$

В случае расположения маховиков, приведенном на рисунке 1, что соответствует случаю единичной матрицы B , линеаризованные уравнения принимают следующий вид:

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{2P}(Yq_1 + \varepsilon\dot{q}_1 - M_2), \quad (14)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{2P}(Yq_2 + \varepsilon\dot{q}_2 - M_1), \quad (15)$$

$$\ddot{q}_3 = \frac{1}{2P_3}(\varepsilon\dot{q}_3 - M_3), \quad (16)$$

$$\ddot{\alpha}_1 = -\frac{Yq_2 + \varepsilon\dot{q}_2}{2P} + \left(\frac{1}{c_m} + \frac{1}{2P}\right)M_1, \quad (17)$$

$$\ddot{\alpha}_2 = -\frac{Yq_1 + \varepsilon\dot{q}_1}{2P} + \left(\frac{1}{c_m} + \frac{1}{2P}\right)M_2, \quad (18)$$

$$\ddot{\alpha}_3 = \frac{-\varepsilon\dot{q}_3}{2P_3} + \frac{2P_3 + c_m}{2P_3 c_m}M_3. \quad (19)$$

Линеаризованные уравнения распадаются на три независимые пары уравнений: (14) и (18), (15) и (17), (16) и (19). Первые две пары, т.е. (14) и (18), (15) и (17), представляют собой линеаризованные уравнения движения одномерного обратного маятника, которые были подробно рассмотрены в [18]. Поэтому можем оптимизировать параметры каждого маховика отдельно для простого одномерного перевернутого маятника. Пара уравнений (16) и (19) описывает собственное вращение конструкции, т.е. ее вращение вокруг своей оси симметрии. Будем предполагать, что возмущения, соответствующие собственному вращению конструкции, не велики и на практике ими можно пренебречь. В случае движения двуногого робота такие возмущения будут компенсироваться не системой стабилизации, а ногами робота.

Рассмотрим теперь другой случай расположения маховиков системы стабилизации, так называемое «Cubli»-расположение [9]. Ему соответствует матрица B , приведенная в формуле (2). В этом случае линеаризованные уравнения примут вид:

$$\ddot{q}_1 = \frac{q_1 Y + \varepsilon \dot{q}_1}{2P} - \frac{M_2 - M_3}{2\sqrt{2}P},$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{q_2 Y + \varepsilon \dot{q}_2}{2P} - \frac{2M_1 - M_2 - M_3}{2P\sqrt{6}},$$

$$\ddot{q}_3 = \frac{\varepsilon \dot{q}_3}{2P_3} + \frac{M_1 + M_2 - M_3}{2P_3\sqrt{3}},$$

$$\ddot{\alpha}_1 = -\frac{q_2 Y + \varepsilon \dot{q}_2}{P\sqrt{6}} + \frac{\varepsilon \dot{q}_3}{2P_3\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{c_m} + \frac{1}{3P} + \frac{1}{6P_3}\right)M_1 + \left(-\frac{1}{6P} + \frac{1}{6P_3}\right)M_2 + \left(-\frac{1}{6P} - \frac{1}{6P_3}\right)M_3,$$

$$\ddot{\alpha}_2 = -\frac{q_1 Y + \varepsilon \dot{q}_1}{2P\sqrt{2}} + \frac{q_2 Y + \varepsilon \dot{q}_2}{2P\sqrt{6}} + \frac{\varepsilon \dot{q}_3}{2P_3\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{6P_3} - \frac{1}{6P}\right)M_1 + \left(\frac{1}{c_m} + \frac{1}{3P} + \frac{1}{6P_3}\right)M_2 + \left(-\frac{1}{6P} - \frac{1}{6P_3}\right)M_3,$$

$$\ddot{\alpha}_3 = \frac{q_1 Y + \varepsilon \dot{q}_1}{2P\sqrt{2}} + \frac{q_2 Y + \varepsilon \dot{q}_2}{2P\sqrt{6}} - \frac{\varepsilon \dot{q}_3}{2P_3\sqrt{6}} + \left(-\frac{1}{6P_3} - \frac{1}{6P}\right)M_1 + \left(-\frac{1}{6P} - \frac{1}{6P_3}\right)M_2 + \left(\frac{1}{c_m} + \frac{1}{3P} + \frac{1}{6P_3}\right)M_3.$$

Управления u_1, u_2, u_3 для двигателей маховиков выбираются методом LQR. При этом минимизируется следующий функционал:

$$J = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^2 q_i^2 dt + \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^{23} (u_i^2 + \dot{q}_i^2 + \dot{\alpha}_i^2) dt.$$

Эта процедура выполняется как для нашего случая расположения маховиков (единичная матрица B), так и для «Cubli»-вского случая расположения маховиков (2).

Проведение численных экспериментов и обсуждение их результатов. При проведении вычислительных экспериментов в MATLAB/Simulink с имитационной моделью системы (рис. 3) были использованы следующие значения электромеханических параметров перевернутого (обратного) маятника: $m = 0,2$ кг; $l = 0,085$ м; $b = 0,08$ м; $M = 0,4$ кг; $c_v = 5 \cdot 10^{-5}$ Н·м·с; $c_u = 0,025$ Н·м/В; $A_m = 2,85 \cdot 10^{-4}$ кг·м²; $C_m = 5,7 \cdot 10^{-4}$ кг·м²; $A = 1,6 \cdot 10^{-3}$ кг·м²; $C = 1,52 \cdot 10^{-3}$ кг·м²; $g = 9,81$ м/с²; $\varepsilon = -0,01$ Н·м·с.

Основной целью проведения серии вычислительных экспериментов для перевернутого маятника была оценка затрат энергии, необходимых для устранения различных начальных возмущений.

Ниже мы представляем результаты только нескольких из экспериментов, остальные результаты – похожие. Вычислительные эксперименты состояли в численном решении системы дифференциальных уравнений (14)–(19) и аналогичной системы дифференциальных уравнений для «Cubli»-вского расположения маховиков.

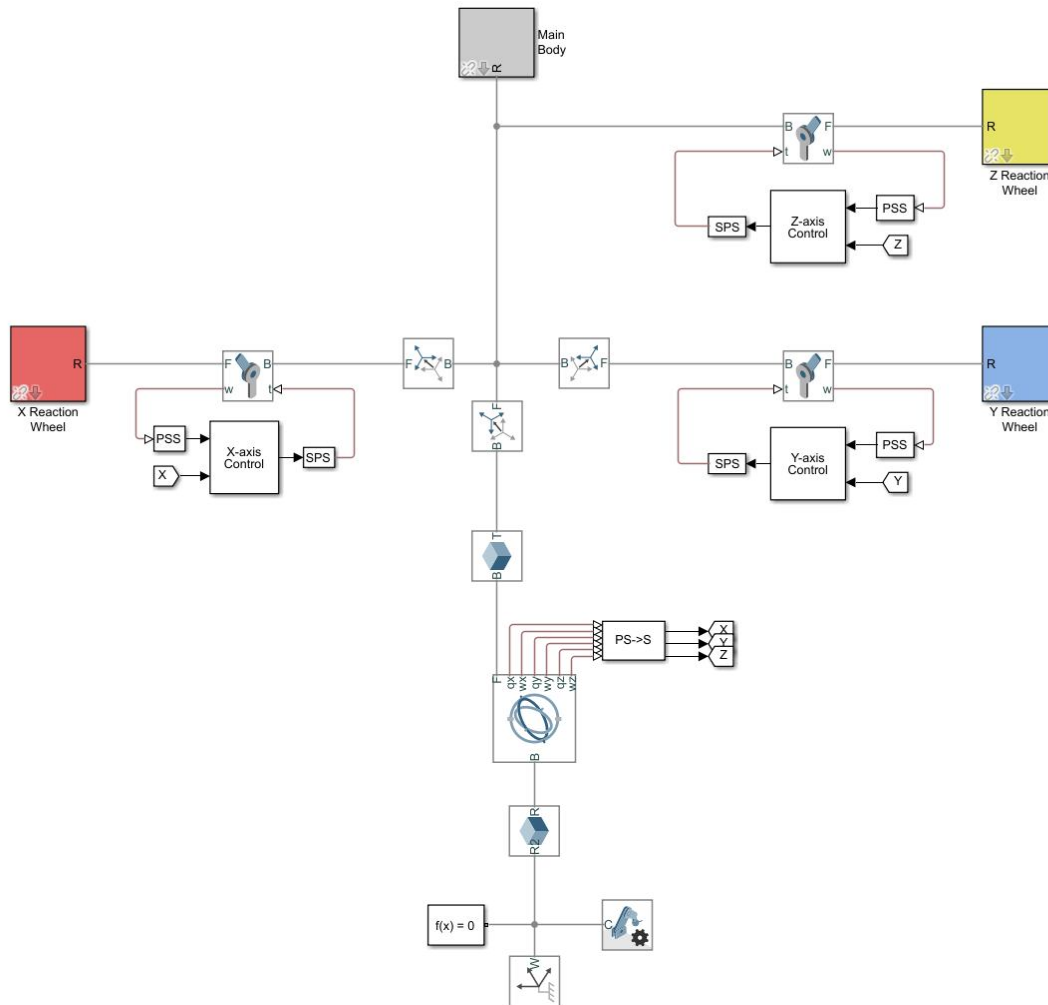


Рисунок 3 – Имитационная модель системы в MATLAB/Simulink

В таблице приведены затраты энергии для «Cubli»-подобной геометрии и геометрии нашего маховика (последние два столбца) для указанных значений начальных возмущений переменных $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2$. Для оставшихся переменных $q_3, \dot{q}_3, \dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3$ начальные возмущения были установлены в «ноль» для приведенных пяти экспериментов. В таблице $E_c = \int_0^\infty \sum_{i=1}^3 |u_i \dot{\alpha}_i| dt$ – энергетические затраты «Cubli»-расположения маховиков, $E_n = \int_0^\infty \sum_{i=1}^3 |u_i \dot{\alpha}_i| dt$ – энергетические затраты используемого в рассматриваемой конструкции расположения маховиков (с единичной матрицей B). Результаты вычислительных экспериментов показывают, что наше расположение маховика более энергоэффективно.

Таблица – Сравнение затрат энергии для нашего и для «Cubli»-вского расположения маховиков

№ эксперимента	q_1	q_2	\dot{q}_1	\dot{q}_2	E_c	E_n
1	0,1	0	0	0	13,1	10,9
2	0	0,1	0	0	11,6	10,9
3	0,1	0,1	0	0	27,1	21,8
4	0	0	0,1	0	0,184	0,156
5	0	0	0	0,1	0,165	0,156

На рисунке 4 показан пример стабилизации устройства, начиная с начального отклонения $q_1 = q_2 = q_3 = 0.1$.

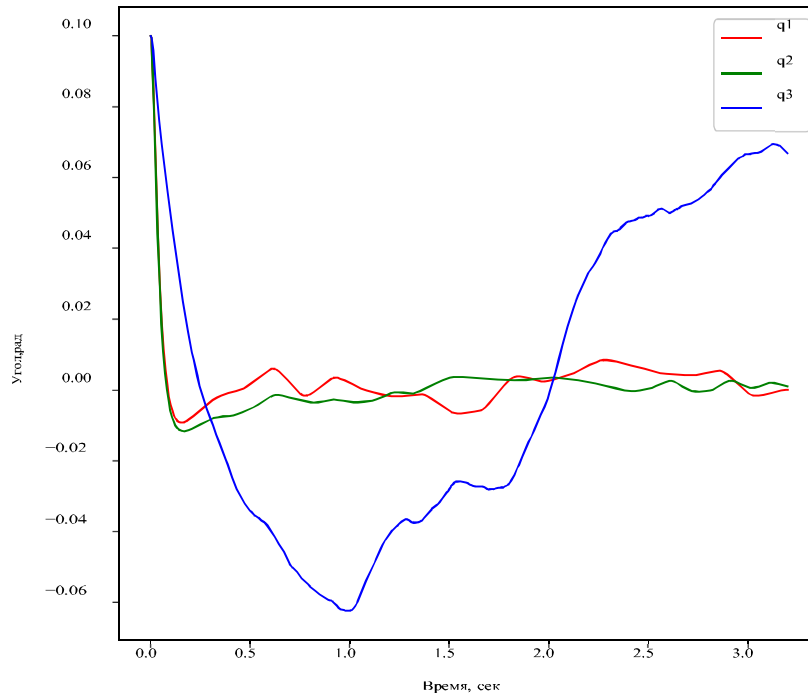


Рисунок 4 – Стабилизация устройства, соответствующего аппаратной реализации трехмерного перевернутого маятника по рисунку 1

Проведенная серия численных экспериментов позволила сделать вывод, что предложенная в работе система стабилизации обеспечивает устойчивость конструкции при заданных параметрах.

Реализация перемещения робота. При перемещении питание робота осуществляется 2-мя последовательно включенными аккумуляторами Lipo 3s емкостью 5,2 А·ч каждый, расположенными внутри корпуса (сферы) и позволяющими использовать робота не менее 1 ч без перезарядки. Внешнее управление роботом осуществляется по радиоканалу на основе WiFi-модуля микрокомпьютера Raspberry pi 3b, расположенного внутри корпуса и используемого как контроллер верхнего уровня робота. Дополнительно к роботу может подключаться отладочный usb-кабель.

Робот имеет возможность нести до 3,8 кг полезной нагрузки и выдерживать опрокидывающее воздействие мощностью до 100 Вт.

Пример подъема робота на ступеньки, габариты которых приведены на рисунке 5, показан на рисунке 6.

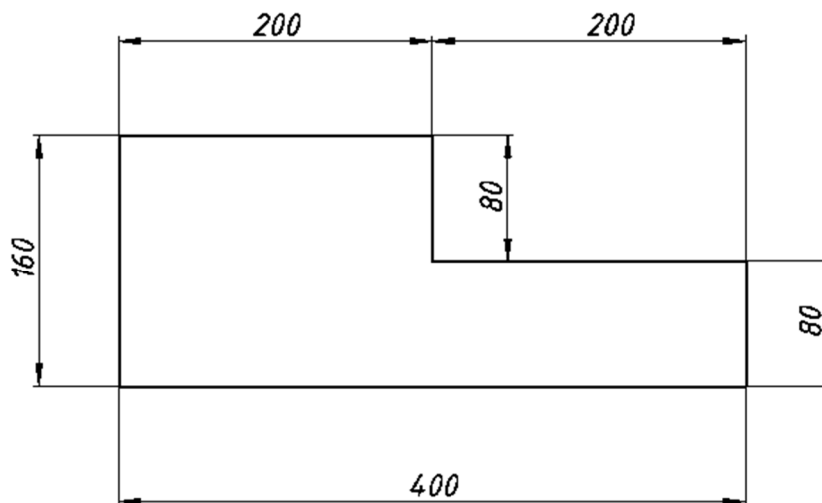


Рисунок 5 – Габариты ступенек (мм)

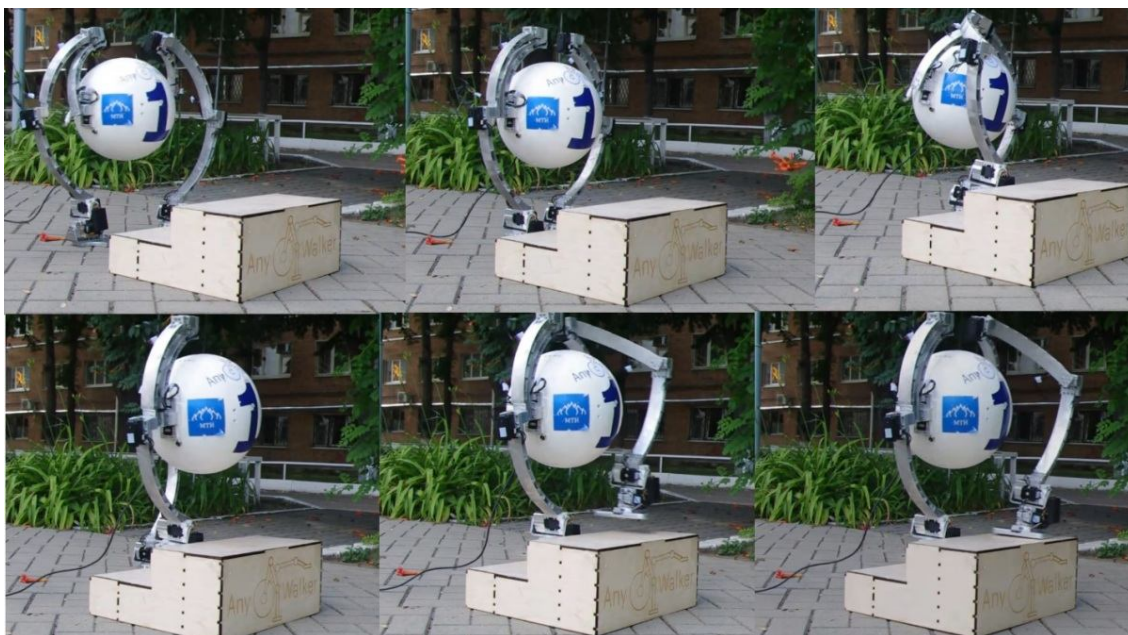


Рисунок 6 – Подъем робота по ступенькам

Как видно из рисунка 6, разработанная система стабилизации на основе трех маятников позволяет роботу удерживать равновесие при ходьбе и подъеме на ступеньки.

Заключение. Рассмотрена задача стабилизации обратного трехмерного маятника. Предложено использовать для стабилизации управление в виде линейной обратной связи по состоянию. На численных экспериментах и экспериментах с опытными образцами показана работоспособность предложенного решения. Результаты сравнения с «Cubli» [20] показывают, энергетическую эффективность разработанного решения. Построена модель стабилизации шагающего робота на основе маятника. Она может быть обобщена для случая трех степеней свободы обратного маятника. На численных экспериментах и экспериментах с опытным образцом показана работоспособность предложенного решения.

Библиографический список

1. Голубев, Ю. Ф. Основы теоретической механики : учебник для студентов вузов, обучающихся по направлениям «Механика» и «Математика» / Ю. Ф. Голубев. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2000. – 719 с. : ил. ; 22 см. – ISBN 5-211-04244-1.
2. Курочкин М. А. Исследование моделей реализации волнового алгоритма движения робота для архитектуры NVIDIA в технологии CUDA / М. А. Курочкин, В. С. Крыштапович // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. – 2018. – № 3. – С. 96–107.
3. Рядчиков И. В. Модельное исследование и реализация стабилизирующего комплекса шагающего робота AnyWalker / И. В. Рядчиков [и др.] // Cloud of Science. – 2018. – Т. 5, № 3 – С. 498–515.
4. Савин С. И. Классификация режимов движения четырехногого плоского внутритрубного робота / С. И. Савин, Л. Ю. Ворочаева, А. В. Ворочаев // Cloud of Science. – 2017. – Т. 4, № 2. – С. 224–248.
5. Booysen T. The development of a remote controlled, omnidirectional six legged walker with feedback / T. Booysen, S. Marais // AFRICON. – 2013. – P. 1–6.
6. Borràs J. Static analysis of parallel robots with compliant joints for in-hand manipulation / J. Borràs, A. M. Dollar // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). – 2012. – P. 3086–3092.
7. Collins S. Efficient bipedal robots based on passive-dynamic walkers / S. Collins et al. // Science. – 2005. – Vol. 307, № 5712. – P. 1082–1085.
8. Collins S. H. A three-dimensional passive-dynamic walking robot with two legs and knees / S. H. Collins, M. Wisse, A. Ruina // The International Journal of Robotics Research. – 2001. – Vol. 20, № 7. – P. 607–615.
9. Gajamohan M. The cubli: A cube that can jump up and balance / M. Gajamohan, M. Merz, I. Thommen, R. D'Andrea // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). – 2012. – P. 3722–3727.
10. Goswami A. Walking Robots / A. Goswami // Encyclopedia of Systems and Control. – 2015. – P. 1537–1548.
11. Hirukawa H. Humanoid robotics platforms developed in HRP / H. Hirukawa [и др.] // Robotics and Autonomous Systems. – 2004. – Vol. 48, № 4. – P. 165–175.
12. Kajita S. A Hop towards Running Humanoid Biped / S. Kajita et al. // IEEE International Conference on Robotics & Automation. – New Orleans, LA : IEEE, 2004.
13. Kar D. C. Design of a statically stable walking robot: A review / D.C. Kar // Journal of Robotic Systems. – 2003. – Vol. 20, № 11. – P. 671–686.
14. Kuo A. D. Choosing Your Steps Carefully / A. D. Kuo // IEEE Robotics & Automation Magazine. – 2007. – Vol. 14, № 2. – P. 18–29.

15. Liu G. H. Design of a kangaroo robot with dynamic jogging locomotion / G.H. Liu et al. // IEEE/SICE International Symposium on System Integration (SII). – 2013. – P. 306–311.
16. McGeer T. Passive dynamic walking / T. McGeer. // The International Journal of Robotics Research. – 1990. – Vol. 9, № 2. – P. 62–82.
17. Ryadchikov I. Stabilization system of a bipedal non–anthropomorphic robot AnyWalker / I. Ryadchikov, S. Sechenov, M. Drobotenko, A. Svidlov, P. Volkodav // Journal of Engineering Science and Technology Review. – 2018. – Vol. 11, № 5. – P. 128–133.
18. Ryadchikov I. Control and stability evaluation of the bipedal walking robot AnyWalker / I. Ryadchikov et al. // International Review of Automatic Control. – 2018. – Vol. 11, № 4. – P. 160–165.
19. Sakagami Y. The intelligent ASIMO: system overview and integration. / Y. Sakagami et al. // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. – Lausanne, Switzerland : IEEE, 2002.
20. Singh R. A review on Cubli and non linear control strategy / R. Singh, V. K. Tayal, H.P. Singh // IEEE International Conference on Power Electronics, Intelligent Control and Energy Systems (ICPEICES). – IEEE, 2016. – P. 1–5.
21. Szczecinski N. S. Design process and tools for dynamic neuromechanical models and robot controllers / N.S. Szczecinski, A.J. Hunt, R.D. Quinn // Biological cybernetics. – 2017. – Vol. 111, № 1. – P. 105–127.
22. Tedeschi F. Design issues for hexapod walking robots / F. Tedeschi, G. Garbone // Robotics. – 2014. – Vol. 3, № 2. – P. 181–206.
23. Vukobratovic M. ZMP: A review of some basic misunderstandings / M. Vukobratovic, B. Borovac, V. Potkonjak // International Journal of Humanoid Robotics. – 2006. – Vol. 3, № 2. – P. 153–175.
24. Xiong X. Adaptive and energy efficient walking in a hexapod robot under neuromechanical control and sensorimotor learning / X. Xiong, F. Wörgötter, P. Manoonpong // IEEE Transactions on Cybernetics. – 2016. – Vol. 46, № 11. – P. 2521–2534.

References

1. Golubev Yu. F. *Osnovy teoreticheskoy mekhaniki uchebnik dlya studentov vuzov obuchayushchikhsya po napravleniyam "Mekhanika" i "Matematika"* [Fundamentals of theoretical mechanics: textbook for University students studying in the areas of "Mechanics" and "Mathematics"]. 2nd ed. Moscow, Moscow State University, 2000. 719 p.
2. Kurochkin M. A., Kryshchapovich V. S. Issledovanie modeley realizatsii volnovogo algoritma dvizheniya robota dlya arkhitektury NVIDIA v tekhnologii CUDA [Study of models of implementation of the wave algorithm of the motion of the robot for NVIDIA architecture in CUDA technology]. *Prikladnyy zhurnal: upravlenie i vysokie tekhnologii* [Caspian Journal: Control and High Technologies], 2018, no. 3, pp. 96–107.
3. Ryadchikov I. V. et al. Modelnoe issledovanie i realizatsiya stabiliziruyushchego kompleksa shagayushchego robota AnyWalker [A model study and implementation of a stabilizing complex of walking robot AnyWalker]. *Cloud of Science*, 2018, vol. 5, no. 3, pp. 498–515.
4. Savin S. I., Vorochaeva L. Yu., Vorochaev A. V. Klassifikatsiya rezhimov dvizheniya chetyrekhnogogo ploskogo vnutritrubnogo robota [Classification of motion modes for quadruped intratubal flat robot]. *Cloud of Science*, 2017, vol. 4, no. 2, pp. 224–248.
5. Booyesen T., Marais S. The development of a remote controlled, omnidirectional six legged walker with feedback. *AFRICON*, 2013, pp. 1–6.
6. Borrás J., Dollar A.M. Static analysis of parallel robots with compliant joints for in-hand manipulation. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2012, pp. 3086–3092.
7. Collins S. et al. Efficient bipedal robots based on passive-dynamic walkers. *Science*, 2005, vol. 307, no. 5712, pp. 1082–1085.
8. Collins S. H., Wisse M., Ruina A. A three-dimensional passive-dynamic walking robot with two legs and knees. *The International Journal of Robotics Research*, 2001, vol. 20, no. 7, pp. 607–615.
9. Gajamohan M. et al. The cubli: A cube that can jump up and balance. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2012, pp. 3722–3727.
10. Goswami A. Walking Robots. *Encyclopedia of Systems and Control*, 2015, pp. 1537–1548.
11. Hirukawa H. et al. Humanoid robotics platforms developed in HRP. *Robotics and Autonomous Systems*, 2004, 4, vol. 48, pp. 165–175.
12. Kajita S. A. et al. Hop towards Running Humanoid Biped. *IEEE International Conference on Robotics & Automation*, New Orleans, LA : IEEE, 2004.
13. Kar D. C. Design of a statically stable walking robot: A review. *Journal of Robotic Systems*, 2003, vol. 20, no. 11, pp. 671–686.
14. Kuo A. D. Choosing Your Steps Carefully. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2007, vol. 14, no. 2, pp. 18–29.
15. Liu G. H. et al. Design of a kangaroo robot with dynamic jogging locomotion. *IEEE/SICE International Symposium on System Integration (SII)*, 2013, pp. 306–311.
16. McGeer T. Passive dynamic walking. *The International Journal of Robotics Research*, 1990, vol. 9, no. 2, pp. 62–82.
17. Ryadchikov I. et al. Stabilization system of a bipedal non–anthropomorphic robot AnyWalker. *Journal of Engineering Science and Technology Review*, 2018, vol. 11, no. 5, pp. 128–133.
18. Ryadchikov I. et al. Control and stability evaluation of the bipedal walking robot AnyWalker. *International Review of Automatic Control*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 160–165.
19. Sakagami Y. et al. The intelligent ASIMO: system overview and integration. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Lausanne, Switzerland, IEEE, 2002.
20. Singh R. A review on Cubli and non linear control strategy. *IEEE International Conference on Power Electronics, Intelligent Control and Energy Systems (ICPEICES)*. IEEE, 2016, pp. 1–5.

21. Szczecinski N. S. et al. Design process and tools for dynamic neuromechanical models and robot controllers. *Biological cybernetics*, 2017, vol. 111, no.1, pp. 105–127.
22. Tedeschi F. et al. Design issues for hexapod walking robots. *Robotics*, 2014, vol. 3, no. 2, pp. 181–206.
23. Vukobratovic M. et al. ZMP: A review of some basic misunderstandings. *International Journal of Humanoid Robotics*, 2006, vol. 3, no. 2, pp. 153–175.
24. Xiong X. et al. Adaptive and energy efficient walking in a hexapod robot under neuromechanical control and sensorimotor learning. *IEEE transactions on cybernetics*, 2016, vol. 46, no. 11, pp. 2521–2534.

УДК 004.896, 629.584

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОДВОДНЫМ РОБОТОМ НА ОСНОВЕ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Статья поступила в редакцию 10.11.2018, в окончательном варианте – 13.02.2019.

Свищев Николай Дмитриевич, Астраханский государственный университет, 414056, Российская Федерация, г. Астрахань, ул. Татищева, 20а,
магистрант, e-mail: svishchev.nikolai@gmail.com

Рыбаков Алексей Владимирович, Астраханский государственный университет, 414056, Российская Федерация, г. Астрахань, ул. Татищева, 20а,
кандидат физико-математических наук, директор физико-математического института, e-mail: rybakov_alex@mail.ru

В последнее время для выполнения работ в сложных условиях при ремонте подводных частей инженерных сооружений, визуальном осмотре оснований буровых платформ, корпусов судов, подводных трубопроводов и кабелей все чаще применяются подводные роботы. Как правило, это полуавтономные аппараты, в которых основными задачами автоматического управления являются контроль положения и/или скорости робота. При этом актуальность приобретают задачи точного позиционирования робота в условиях изменений скоростей течений, удержания робота в перпендикулярном осматриваемой плоскости положении на строго определенной глубине, минимизации ошибок при перемещении аппарата по заданной траектории. Использование нейронных сетей для построения адаптивных регуляторов позволяет решить сформулированные задачи. Задача позиционирования в условиях изменяющейся внешней среды может быть решена с использованием нейросетевого регулятора. В статье представлено описание конструкции, кинематики и динамики робота для выполнения визуальных осмотров подводных сооружений, разработана его математическая модель, основанная на теории управления подводных аппаратов, и приведены результаты симуляции в Matlab. Результаты, полученные при использовании модели нейросетевого регулятора, сравниваются с результатами для одной из самых распространенных моделей – ПИД регулятора.

Ключевые слова: нейронная сеть, подводный робот, интеллектуальное управление, позиционирование, динамика подводных аппаратов, нейросетевой регулятор, корректирующий фильтр, кинематика вязкой среды

Графическая аннотация (Graphical annotation)

