ПРИКАСПИЙСКИЙ ЖУРНАЛ:
управление и высокие технологии № 4 (8) 2009

УДК 577.95

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ «ХИЩНИК – ЖЕРТВА» С РАЗНЫХ ТОЧЕК ЗРЕНИЯ[1]

Г.Н. Яковенко

Обсуждаются математические модели взаимодействия популяций. Модели рассматриваются с следующих точек зрения: параметрическая робастность; преобразование пространства состояний – перевод начального состояния в текущее; при наличии робастности – группы преобразований пространства состояний; модели, инвариантные к описанию входных и выходных переменных.

Ключевые слова: *математические модели, взаимодействие популяций, параметрическая робастность, преобразование пространства состояний, группы преобразований.*

Key words: *mathematical models, interaction population, parametric robustness, transformation state space, groups of the transformations.*

Взаимодействие популяций является предметом интереса многих поколений естествоиспытателей. Хрестоматийной является модель взаимодействия «хищник – жертва» – модель Лотки-Вольтерра [1, 7]

$$\dot{x} = ax - c_1xy, \qquad \dot{y} = -by + c_2xy, \tag{1.1}$$

где x, y – биомассы популяций хищника и жертвы, a, b, c_1, c_2 – положительные постоянные.

В последнее время появились примеры использования модели (1.1) в сферах, отличных от биологических: в эпидемиологических моделях [4], при моделировании социально-политической и экономической динамики [5], при моделировании взаимодействия валют [8], при моделировании творческих процессов [3].

В настоящей работе предлагается несколько направлений, по которым обобщается модель (1.1). Во-первых, в модели учитывается неопределенность (робастность), которую свойственно вносить природе в взаимодействие биологических субъектов: перепады температуры и давления, дуновения ветра, суточные и сезонные изменения и т.д. Эта неопределенность учтена вхождением в уравнения в отличие от постоянных a, b, c_1, c_2 достаточно произвольных функций $u_k(t)$ времени t (нестационарная робастность). Во-вторых, нелинейности, входящие в уравнения вводятся не только с целью учесть желаемое поведение популяций, но и с целью добиться дополнительных свойств. В частности, функциональная мощность непредсказуемого влияния $u_k(t)$ природы вызывает функциональную мощность преобразований пространства состояний. За счёт целенаправленного введения нелинейностей можно добиться того, что все возможные преобразования (при разных функциях $u_k(t)$) принадлежат конечно-параметрической группе. В-третьих, устраняется субъективизм, который вносит в модель конкретный выбор переменных состояния, и следующие из этого выбора рассуждения о линейности/нелинейности. На основе алгебр и групп Ли стро-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00217) и аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» (проект 2.1.1/3604).

ятся модели, инвариантные к выбору переменных состояния, т.е. модель не изменяется при любой, в том числе и нелинейной, неособенной замене переменных.

В следующем пункте приведятся минимальные сведения о непрерывных группах и о групповых системах.

Непрерывные группы. Групповые системы

Группа преобразований $x \leftrightarrow x_0$ определяется соотношением ($v_1, \ldots, v_r$ – групповые параметры)

$$x_k = g_k(x_{10}, \ldots, x_{n0}, v_1, \ldots, v_r) \tag{2.1}$$

при выполнении следующих условий [6]: $g(x_0, 0) = x_0$, $g(g(x_0, v), v^*) = g(x_0, h(v, v^*))$. Соотношение (2.1) определяет группу, если оно есть решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений $(v_k = u_k t)$ [6]

$$\dot{x}_k = \sum_{l=1}^{r} \varphi_{kl}(x) u_l, \quad u_k = const, \quad x(0) = x_0, \tag{2.2}$$

причём для функций $\varphi_{kl}(x)$ выполняются условия

$$rank \, \| \varphi_{kl}(x) \| = \min\{n,, r\}, \tag{2.3}$$

$$\left\{ \sum_{l=1}^{r} c_l \varphi_{kl}(x) = 0, \qquad c_l = const \right\} \Rightarrow \{c_l = 0\}, \tag{2.4}$$

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} C_{ij}^k X_k, \quad C_{ij}^k = const, \tag{2.5}$$

где обозначено

$$X_l = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{kl}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{2.6}$$

$[X_i, X_j]$ – коммутатор операторов (2.6):

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} \{X_i \varphi_{kl}(x) - X_j \varphi_{il}(x)\} \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{2.7}$$

Равенство (2.5) показывает, что множество операторов $\sum_{k=1}^{r} u_k X_k$, $u_k = const$, есть алгебра Ли с базисом X_k и структурными постоянными C_{ij}^k [2, 6].

Определение 2.1 [9–11]. Система

$$\dot{x}_k = \sum_{l=1}^{r} \varphi_{kl}(x) u_l(t), \qquad k = \overline{1, n}, \tag{2.8}$$

называется **групповой**, если функции $\varphi_{kl}(x)$ удовлетворяют условиям (2.3) – (2.7), а функции $u_l(t)$ – достаточно произвольные функции независимой переменной t. **L-система**

$$\dot{x}_k = \sum_{l=1}^{n} \varphi_{kl}(x) u_l(t), \qquad k = \overline{1, n}, \tag{2.9}$$

это групповая система при $r = n$.

Группу (2.1) можно вычислить при помощи системы (2.2).

Следующая теорема наводит связь между функционированием групповой системы (2.8) и группой (2.1).

Теорема 2.1 [9–11]. Сопоставим $\{u(t), t\}$ преобразование пространства R^n – сдвиги вдоль решений $x(t)$ групповой системы (2.8), в которую подставлены функции $u(t)$: из точек $x(0) = x_0$ в точки $x(t)$. Преобразование $x_0 \leftrightarrow x(t)$ принадлежит группе (2.1), т.е. каждой паре $\{u(t), t\}$ соответствует такой набор параметров $v_1, \ldots, v_r$, что преобразование (2.1) и преобразование $x_0 \leftrightarrow x(t)$ совпадают.

Для построения инвариантной к выбору переменных x модели требуется погрузить групповую систему в класс L-систем. Каждой групповой системе (2.8) при $r \neq n$ можно поставить в соответствие L-систему (2.9). Далее потребуется случай $r > n$.

Теорема 2.2 [9–11] Пусть для групповой системы (2.8) выполняется $r > n$. Тогда добавлением к (2.8) уравнений

$$\dot{x}_{n+i} = \sum_{l=1}^{r} \varphi_{n+il}(x) u_l(t), \qquad i = \overline{1, r-n}, \tag{2.10}$$

можно добиться того, что расширенная система (2.8), (2.10) – L-система (2.9) с теми же структурными постоянными C_{ij}^k, что и в (2.5).

Добавленные уравнения (2.10) строятся по вполне определенному алгоритму [9–11]

Модель, инвариантная к выбору переменных состояния

Принадлежность к L-системам инвариантна по отношению к неособенному преобразованию $\tilde{x} = h(x)$ переменных состояния. В переменных $\tilde{x}$ система (2.9) имеет такую же структуру

$$\dot{\tilde{x}}_k = \sum_{l=1}^{n} \tilde{\varphi}_{kl}(\tilde{x}) u_l(t), \qquad k = \overline{1, n} \tag{3.1}$$

Функции $\tilde{\varphi}_{kl}(\tilde{x})$ удовлетворяют условиям (2.3) – (2.5), причем с теми же постоянными C_{ij}^k в (2.5), что и в переменных x. Если системы (2.9), (3.1), связанные неособенным преобразованием $x \leftrightarrow \tilde{x}$, считать эквивалентными, то каждому классу эквивалентности соответствуют размерность n пространства состояний x и постоянные C_{ij}^k:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \dot{x}_k & = & \sum_{l=1}^{n} \varphi_{kl}(x) u_l(t) \\ \updownarrow & & x \leftrightarrow \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}}_k & = & \sum_{l=1}^{n} \tilde{\varphi}_{kl}(\tilde{x}) u_l(t) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \{n, C_{jk}^i\} \tag{3.2}$$

Соответствие – взаимно однозначно: по структурным постоянным C_{ij}^k некоторых переменных вычисляется базис $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n$ алгебры Ли [2, 6], по операторам $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n$ определяется представитель класса эквивалентности (3.2) с возможностью заменой переменных перейти к другому представителю. Набор $\{n, C^i_{jk}\}$ являет собой пример инвариантной математической модели динамической системы. По этому набору можно исследовать те свойства системы, которые сохраняются при заменах переменных x: наличие первых интегралов, инвариантных поверхностей и т.д. Алгебраическая структура, определяемая C^k_{ij}, позволяет строить в соответствующем классе эквивалентности (3.2) представителей специального вида: линейного, билинейного, двухуровневого, блочного и т.д.

Групповая система, моделирующая взаимодействие двух популяций

Предлагается следующая модель взаимодействия (k и l – показатели степени):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} u_1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} u_2(t) + \begin{pmatrix} c_1 x^{k+1} y^l \\ c_2 x^k y^{l+1} \end{pmatrix} u_3(t), \tag{4.1}$$

где $x > 0$ и $y > 0$ – биомассы взаимодействующих видов, c_1, c_2, k и l – числа, $u_k(t)$ – произвольные функции. Система (4.1) – модификация уравнений Лотки-Вольтерра (1.1). При $u_3(t) \equiv 0$ система (4.1) – уравнения Мальтуса. При $u_2(t) \equiv 0$, $k = 1$, $l = 0$ первое уравнение в (4.1) – логистическое уравнение Ферхюльста. Системе (4.1) соответствуют операторы (2.6):

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = c_1 x^{k+1} y^l \frac{\partial}{\partial x} + c_2 x^k y^{l+1} \frac{\partial}{\partial x}. \tag{4.2}$$

Вычисление коммутаторов (2.7) приводит к результату

$$[X_1, X_2] = 0, \qquad [X_1, X_3] = kX_3, \qquad [X_2, X_3] = lX_3, \tag{4.3}$$

т. е. операторы (4.2) – базис алгебры Ли с структурными постоянными[2]

$$C^3_{13} = k, \qquad C^3_{23} = l, \tag{4.4}$$

С учетом (4.3) при условии

$$x > 0, \quad y > 0, \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0, \quad k^2 + l^2 \neq 0$$

система (4.1) является групповой (2.8). Для определенности далее предполагаем $k \neq 0$ и условия используем в следующем виде

$$x > 0, \quad y > 0, \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0, \quad k \neq 0. \tag{4.5}$$

Добавляя к системе (4.1) уравнение (2.10) для переменной z, погружаем систему (2.1) в класс L-систем (2.9)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} u_2(t) + \begin{pmatrix} c_1 x^{k+1} y^l \\ c_2 x^k y^{l+1} \\ x^k y^l \end{pmatrix} u_3(t). \tag{4.6}$$

Для L-системы (4.6) по сравнению с системой (4.1) дополняются операторы (4.2):

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = c_1 x^{k+1} y^l \frac{\partial}{\partial x} + c_2 x^k y^{l+1} \frac{\partial}{\partial x} + x^k y^l \frac{\partial}{\partial z}, \tag{4.7}$$

[2] Здесь и далее приводятся только ненулевые структурные постоянные C^k_{ij}, удовлетворяющие условию $i < j$.

причем для (4.7) справедливы те же равенства (4.3), (4.4), что и для операторов (4.2). Системе (4.6) соответствует инвариантная модель (3.2):

$$\{3,\ C_{13}^{3}=k\,,\ C_{23}^{3}=l\,\}. \qquad (4.8)$$

Алгебраические преобразования L-системы

Набор структурных постоянных $C_{13}^{3}=k$, $C_{23}^{3}=l$ характеризует алгебру Ли с базисом (4.7): трехмерная нильпотентная алгебра, у которой производная алгебра одномерна и не принадлежит центру [2]. Структура алгебры дает возможность сменой базиса упростить набор $C_{13}^{3}=k$, $C_{23}^{3}=l$. Из «таблицы умножения» (4.3) следует ($k\neq 0$, см. (4.5)):

$$[\frac{1}{k}X_1,X_2]=0,\qquad [\frac{1}{k}X_1,X_3]=X_3,\qquad [kX_2-lX_1,X_3]=0.$$

Для новых базисных операторов

$$Y_1=\frac{1}{k}X_1,\qquad Y_2=kX_2-lX_1,\qquad Y_3=X_3 \qquad (5.1)$$

(определитель матрицы перехода от X_i к Y_k равен $k\neq 0$) «таблица умножения» такова

$$[Y_1,Y_2]=0,\qquad [Y_1,Y_3]=Y_3,\qquad [Y_2,Y_3]=0, \qquad (5.2)$$

т.е. с базисом (5.1) алгебра Ли характеризуется структурными постоянными (см. сноску перед формулой (4.4))

$$C_{13}^{3}=1 \qquad (5.3)$$

Переход от базиса X_i к базису Y_k можно осуществить следующим образом. Вместо произвольных функций $u_k(t)$ введем произвольные функции $\tilde{u}_k(t)$:

$$u_1=\tilde{u}_1/k-l\tilde{u}_2,\qquad u_2=k\tilde{u}_2,\qquad u_3=\tilde{u}_3 \qquad (5.4)$$

(определитель матрицы перехода равен $k\neq 0$). В результате замены произвольных функций $u_k(t)$ на $\tilde{u}_k(t)$ L-система (4.6) примет вид

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x/k\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\tilde{u}_1(t)+\begin{pmatrix}-lx\\ ky\\ 0\end{pmatrix}\tilde{u}_2(t)+\begin{pmatrix}c_1x^{k+1}y^{l}\\ c_2x^{k}y^{l+1}\\ x^{k}y^{l}\end{pmatrix}\tilde{u}_3(t). \qquad (5.5)$$

Столбцы в правой части L-системы (5.5) определяют коэффициенты базисных операторов Y_k (см. (4.7), (5.1)). Системе (5.5) соответствует инвариантная модель (3.2): {3, $C_{13}^{3}=1$} (см. (5.3)). Исходя из этой модели, в следующем пункте строится линейный представитель класса эквивалентности (3.2) и изучаются некоторые свойства.

Замена переменных в L-системе

По структурным постоянным (5.3) видно, что алгебра Ли имеет 2-мерный абелев идеал [2] с базисом Y_2, Y_3. Тот факт, что этот идеал абелев, дает возможность одним и тем же преобразованием переменных операторы Y_2, Y_3 «выпрямить» – привести к виду $Y_2=\partial/\partial\tilde{y}$, $Y_3=\partial/\partial\tilde{z}$ [6]. Опустив вычисления, приведем это преобразование (см. требования (4.5))

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \ln(x^k y^l) - \tilde{c}_1 z, \\ \tilde{y} &= \frac{1}{k}\ln y - \tilde{c}_2 z, \\ \tilde{z} &= \frac{1}{x^k y^l}\frac{e^{\tilde{c}_1 z} - 1}{\tilde{c}_1}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

где обозначено

$$\tilde{c}_1 = kc_1 + lc_2, \quad \tilde{c}_2 = \frac{1}{k}c_2. \tag{6.2}$$

Замена переменных (6.1) в системе дифференциальных уравнений (5.5) приводит к L-системе

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \\ \dot{\tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\tilde{z} \end{pmatrix}\tilde{u}_1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\tilde{u}_2(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\tilde{u}_3(t). \tag{6.3}$$

Операторы Y_k в переменных $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ принимают вид

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} - \tilde{z}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}}, \qquad Y_2 = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}, \qquad Y_3 = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}, \tag{6.4}$$

и для них условия (5.2) выполняются с теми же структурными постоянными (5.3), что и в переменных x, y, z. По сравнению с L-системами (4.6) и (5.5) система (6.3) обозрима и поддается всестороннему анализу. Результаты анализа при помощи взаимно однозначных преобразований (5.4), (6.1), (6.2) могут быть возвращены к исходным системам (4.1) и (4.6). Например, для системы (6.3) легко вычисляется трехпараметрическая группа сдвигов вдоль решений [10, 11]:

$$\tilde{x} = \tilde{x}_0 + a_1, \qquad \tilde{y} = \tilde{y}_0 + a_2, \qquad \tilde{z} = (\tilde{z}_0 + a_3)e^{-a_1}. \tag{6.5}$$

Сдвиг вдоль решений системы (6.3), соответствующий паре $\{\tilde{u}_k(t),\ t\}$, есть преобразование группы (6.5). Возврат в (6.5) при помощи (6.1) к переменным x, y, z приведет к группе, соответствующей системе (4.6).

Еще один пример. Пусть функции $\tilde{u}_k(t)$ принадлежат вышеупомянутому абелеву идеалу с базисом Y_2, Y_3, т. е. $\tilde{u}_1(t) \equiv 0$. Тогда у системы (5.3) есть первый интеграл [10–12] – семейство инвариантных поверхностей $\tilde{x} = const$. Этот факт, очевидный и без алгебраических премудростей, при возврате при помощи преобразований (5.4), (6.1), (6.2) к исходным переменным формулируется так: если для системы (4.6) выполняется

$$\tilde{u}_1(t) = ku_1(t) + lu_2(t) \equiv 0,$$

то у системы (4.6) при любых функциях $u_k(t)$ есть первый интеграл [10–12] – семейство инвариантных поверхностей

$$\tilde{x} = \ln(x^k y^l) - (c_1 k + c_2 l)z = const.$$

Библиографический список

1. ***Базыкин, А. Д.*** Нелинейная динамика взаимодействующих популяций / А. Д. Базыкин. – М. – Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2003. – 368 с.

2. ***Джекобсон, Н.*** Алгебры Ли / Н. Джекобсон. – М. : Мир, 1964. – 356 с.

3. ***Зайцев, В.Ф.*** Биоритмы творчества / В. Ф. Зайцев – Л. : Знание, 1989. – 32 с.

4. ***Клементьев, А. А.*** Разработка количественных моделей для решения задач управления в здравоохранении / А. А. Клементьев. – М. : Наука, 1985. – 125 с.

5. ***Моделирование*** социально-политической и экономической динамики. – М. : РГСУ, 2004. – 224 с.

6. ***Овсянников, Л. В.*** Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. – М. : Наука, 1978. – 400 с.

7. ***Ризниченко, Г. Ю.*** Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1 / Г. Ю. Ризниченко. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 232 с.

8. ***Чернавский, Д. С.*** Синергетика и информация (динамическая теория информации) / Д. С. Чернавский – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 328 с.

9. ***Яковенко, Г. Н.*** Дифференциальные уравнения с фундаментальными решениями: Софус Ли и другие / Г. Н Яковенко. – М. : Физматкнига, 2006. – 112 с.

10. ***Яковенко, Г. Н.*** Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы с управлением – сравнительный групповой анализ / Г. Н Яковенко // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2002. – № 3. – С. 40–83.

11. ***Яковенко, Г. Н.*** Теория управления регулярными системами / Г. Н Яковенко. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 264 с.

12. ***Яковенко, Г. Н.*** Управление на группах Ли: первые интегралы, особые управления / Г. Н. Яковенко // Кибернетика и вычислительная техника. – Киев, 1984. – Вып. 62. – С. 10–20.