12. Kleza V. Theoretical investigation of electronic structure and vibrational spectra of conformers of trinitrotoluene and trinitrophenol / V. Kleza, S. Bekesiene // Acta physica PoloniaA. – 2011. – Vol. 119, № 2. – P. 198–193.

13. Kumar J. S. DFT and ab initio study of structure 1,4-dicloro-2-nitrobenztne / J. S. Kumar, M. Arivazhasan // Indian Joornal of Pure & Applied Physic. – 2011. – Vol. 49, № 10. – P. 673–678.

14. Stewart J. J. P. Vibrational spectra 2,4,6-trinitrotoluene and its isotopically substituted analogues / J. J. P. Stewart, S. R. Bosko, W. R. Carpes // Spectrochim. Acta. – 1986. –Vol. 42A, № 1. – P. 13–21.

15. Wadhwani N. Normal vibrational of trinitrotoluene: Need for fresh stady / N. Wadhwani, S. G. Wadhwani, V. D. Gupta // Defence Science Jornal. – 1994. – Vol. 44, № 1. – P. 61–67.

УДК 519.6:517.977.5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА В ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Карпасюк Владимир Корнильевич*, доктор физико-математических наук, Астраханский государственный университет, 414056, Россия, Астрахань, ул. Татищева, 20 а, e-mail: karpasyuk@aspu.ru.*

Карпасюк Игорь Владимирович*, кандидат физико-математических наук, Астраханский государственный технический университет, 414025, Россия, Астрахань, ул. Татищева, 16, e-mail: i.karpasyuk@astu.org.*

В статье рассматривается актуальная проблема моделирования реальных процессов в динамической среде на основе алгоритмов, реализующих требуемые стратегии достижения заданных целей. Предложена математическая модель управляемого плоского движения материальной точки, переходящей из начального состояния в конечное за минимальное время, при наличии на плоскости «запретных областей», описываемых неподвижными или движущимися кругами. Допускается прямолинейное равномерное движение таких препятствий. Строятся уравнения движения с учетом ограничений на максимальное управляющее воздействие. Учитывается сила трения, пропорциональная первой степени скорости. Начальное и конечное значения скорости объекта считаются равными нулю. Уравнения движения интегрируются при условии максимально возможного ускорения. Приводятся основные возможные варианты конфигурации окружающей среды. Для каждого варианта описывается алгоритм управления движением мобильного объекта в детерминированной рабочей области. Рассматриваются различия глобального и локального методов планирования траектории. Описывается компьютерная программа для проведения моделирования движения как в стационарной, так и в нестационарной рабочей среде. Дается сравнение результатов моделирования для случаев глобального и локального управления. Обосновывается адекватность математической модели и достоверность результатов.

Ключевые слова: *математическое моделирование, управляемое движение, обход препятствий, минимизация времени, детерминированная динамическая среда, вязкое трение, система дифференциальных уравнений, глобальное и локальное управление, алгоритм, машинный эксперимент.*

ПРИКАСПИЙСКИЙ ЖУРНАЛ:
управление и высокие технологии № 1 (17) 2012

MATHEMATICAL MODEL OF CONTROLLABLE MOTION OF THE OBJECT IN DETERMINATE DYNAMICAL ENVIRONMENT

Karpasyuk Vladimir K., *Doctor of science (Physics and Mathematics), Astrakhan State University, 20a Tatishchev Str., Astrakhan, 414056, Russia, e-mail: karpasyuk@aspu.ru.*

Karpasyuk Igor V., *Candidate of science (Physics and Mathematics), Astrakhan State Technical University, 16 Tatishchev Str., Astrakhan, 414025, Russia, e-mail: i.karpasyuk@astu.org.*

The paper studies actual problem of the modeling of real processes in dynamical environment on the basis of algorithms which realize required strategies for given aims achievement. Mathematical model of minimal time controllable motion of material point between starting and end states in the plane containing moving or immovable impenetrable round zones is proposed. The straight-line regular motion of such obstacles is allowed. Equations of motion are obtained in the presence of maximum control constraint. The friction force, directly proportional to the velocity, is taken into consideration. Starting and end values of the velocity are assumed to be zero. Equations of motion are integrated under the condition for maximum acceleration. Different basic variants of possible configurations of the environment are given. Algorithms of mobile object motion control in determinate workspace for each variant are described. Differences of global and local methods of trajectories planning are observed. Computer program for modeling of the motion in stationary and non-stationary workspace is described. Comparison of the modeling results for global and local control is given. Adequacy of mathematical model and reliability of results are justified.

Key words: *mathematical modeling, controllable motion, obstacles avoidance, time minimization, determinate dynamical environment, friction of motion, system of differential equations, global and local control, algorithm, computer experiment.*

В последние годы наблюдается расширение сферы применения подвижных объектов для решения задач, относящихся к различным отраслям человеческой деятельности, чему способствует бурное развитие технологий математического моделирования и вычислительного эксперимента, позволяющих строить сложные модели реальных процессов или проектируемых устройств. Одной из основных проблем при создании автоматизированных управляемых устройств, например, мобильных роботов [1], является разработка алгоритмов, обеспечивающих точные движения на быстрых траекториях в динамической среде с препятствиями с целью реализации требуемых стратегий достижения объектами заданных целей. Это особенно актуально для большого класса задач, в которых конфигурация и состояние окружающей среды претерпевают изменения во времени [4, 5].

Целью данной работы явилась разработка математической модели поведения мобильного объекта для задачи оптимизации управления движением на плоскости, содержащей препятствия, а также качественный анализ модели на предмет выявления основных возможных типов движения для разных конфигураций окружающей среды. Примером подобной задачи может служить задача построения оптимального по времени алгоритма управления движением робота в рабочей среде с неподвижными и перемещающимися «запретными» областями.

Постановка задачи. На плоскости имеется рабочая среда, в которой заданы начальная и конечная точки, а также существуют препятствия, которые моделируются с помощью кругов. Центры кругов могут перемещаться прямолинейно с постоянной скоростью. Начальное положение центра, радиус и вектор скорости каждого препятствия считаются известными. В процессе движения препятствия не должны пересекать начальную и конечную точки. Задача состоит в том, чтобы оптимальным образом перевести некоторый мобильный объект, моделируемый материальной точкой, из начальной точки в конечную с нулевой конечной скоростью, причем таким образом, чтобы избежать столкновения с препятствиями. Под оптимальностью подразумевается минимальность времени, затраченного объектом на перемещение из начальной точки в конечную. На максимальное воздействие, вызывающее перемещение объекта (например, на мощность двигателя робота), налагается ограничение. Движение объекта предполагается происходящим в среде при наличии силы трения, пропорциональной скорости.

Математическая модель. Перемещающийся объект (далее – робот) моделируется материальной точкой, а его движение описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$m\ddot{x} = f_x(t) - \gamma\,\dot{x}, \quad m\ddot{y} = f_y(t) - \gamma\,\dot{y} \tag{1}$$

Здесь $x = x(t)$, $y = y(t)$, m – координаты и масса робота, параметр γ вводится для учета трения в среде, поскольку при относительно небольших скоростях силу трения можно считать пропорциональной первой степени скорости (например, [3, с. 97], f_x, f_y – компоненты силы, вызывающей перемещение робота, которая играет в этой системе роль управляющего воздействия. Систему (1) можно переписать в виде:

$$\ddot{x} = U_x(t) - \Gamma\dot{x}, \quad \ddot{y} = U_y(t) - \Gamma\dot{y}, \tag{2}$$

где $U_x = \dfrac{f_x}{m}$, $U_y = \dfrac{f_y}{m}$, $\Gamma = \dfrac{\gamma}{m}$. Конечная мощность двигателя робота налагает ограничение:

$$\left|U_{x,y}\right| \le F. \tag{3}$$

Начальные условия:

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad \dot{y}(t_0) = 0. \tag{4}$$

Конечные условия:

$$x(t_k) = x_k, \quad \dot{x}(t_k) = 0, \quad y(t_k) = y_k, \quad \dot{y}(t_k) = 0. \tag{5}$$

Здесь t_0 – момент начала движения робота, t_k – момент его попадания в конечную точку.

Уравнения движения препятствий, расположенных в рабочем пространстве робота, имеют следующий вид:

$$x_n^i = x_r^i + V_x^i \cdot t, \quad y_n^i = y_r^i + V_y^i \cdot t, \quad i = 1,\ldots,N\ , \tag{6}$$

где (x_n^i, y_n^i) – текущие координаты центра i-ой окружности, (x_r^i, y_r^i) – начальные координаты центра i-ой окружности (в момент времени $t = 0$), (V_x^i, V_y^i) – компоненты вектора скорости центра i-ой окружности, r_i – радиус i-ой окружности.

Представим первое из уравнений системы (2) в виде:

$$\dot{x} = z, \quad \dot{z} = U_x(t) - \Gamma z\,. \tag{7}$$

Известно [2, с. 50], что решение дифференциального уравнения $\dot{z} + p(t)\cdot z = f(t)$ имеет вид:

$$z(t) = \exp\left[-\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau\right]\cdot\left(z_1 + \int_{t_0}^{t} f(t')\cdot\exp\left[\int_{t_0}^{t'} p(\tau)d\tau\right]dt'\right),$$

где $z_1 = const$. Поскольку в данном случае $p(t) = \Gamma = const$, $f(t) = U_x(t)$, следовательно, решение в общем виде будет выглядеть следующим образом:

$$z(t) = e^{-\Gamma\cdot(t-t_0)} \cdot \left(z_1 + \int_{t_0}^{t} U_x(t') \cdot e^{\Gamma\cdot(t'-t_0)} dt' \right). \tag{8}$$

Отсюда получаем:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} z(\tau) d\tau + x_0 = x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\Gamma\cdot(\tau-t_0)} \cdot \left(z_1 + \int_{t_0}^{\tau} U_x(t') \cdot e^{\Gamma\cdot(t'-t_0)} dt' \right) d\tau . \tag{9}$$

Если для $\forall t > t_0$ $U_x(t) = F$ и $z(t_0) = 0$, то есть если робот движется прямолинейно с максимально возможным ускорением из положения с нулевой начальной скоростью, то из (8) имеем:

$$z(t) = \frac{F}{\Gamma}\left(1 - e^{-\Gamma(t-t_0)}\right). \tag{10}$$

Тогда при $t \to \infty$ получаем, что $z \to \dfrac{F}{\Gamma}$, следовательно, ограничение на ускорение определяет ограничение на скорость, и всегда выполняется неравенство:

$$z(t) \le z_{\max} = \frac{F}{\Gamma}, \quad \forall t \ge t_0 . \tag{11}$$

Используя аналогичные рассуждения, для второго уравнения системы (2) можно получить выражения, с точностью до обозначений совпадающие с формулами (7) – (11).

Возможны следующие основные состояния (конфигурации) окружающей среды.

1) *Препятствия отсутствуют*. В этом случае робот должен двигаться с максимально возможным ускорением по прямой, соединяющей начальную и конечную точки, а потом переключать знак ускорения на противоположный, чтобы попасть в конечную точку с нулевой начальной скоростью.

2) *Присутствуют только движущиеся препятствия*. Если траектории препятствий не пересекают отрезок прямой между начальной и конечной точками, то движение робота будет происходить так же, как в варианте 1). Если же препятствия пересекают этот отрезок, то одним из локально-оптимальных решений данной задачи также будет являться наиболее просто реализуемое движение по прямой в направлении конечной точки. При этом для каждого препятствия рассчитывается время первого касания каждым из них этой прямой, после чего препятствия ранжируются по увеличению времени такого касания. Далее, для первого препятствия вычисляется время t_0 задержки начала движения робота (в случае, если в процессе своего движения без задержки робот должен попасть в область пространства, ограниченную препятствием, то есть в случае потенциального столкновения), и это препятствие исключается из списка потенциально опасных препятствий. Потом алгоритм повторяется для первого препятствия из оставшегося списка, и при необходимости время t_0 увеличивается на соответствующую рассчитанную величину. Так происходит до тех пор, пока данный список не будет исчерпан. После этого движение робота происходит так же, как в варианте 1), но с общей задержкой начала движения на время t_0.

3) *Присутствуют только неподвижные препятствия*. Если расположенные в рабочей зоне неподвижные препятствия не пересекают прямую, соединяющую начальную и конечную точки, то движение робота будет происходить по варианту 1). Если же часть препятствий лежит на этой прямой, то оптимальная траектория должна проходить по касательным к каждому препятствию и дуге соответствующей препятствию окружности. Сторона обхода препятствия выбирается из соображений минимальности расстояния до конечной точки. Кроме того, необходимо учитывать условие, позволяющее роботу удержаться на дуге окружности и не соскользнуть с нее под действием центробежной силы. Это порождает разные комбинации вариантов переключения знака управляющего воздействия.

4) *Присутствуют и неподвижные, и движущиеся препятствия*. Данный вариант является наиболее сложным, и движение робота в этом случае является комбинацией алгоритмов, описанных в вариантах 2), 3).

По представленной математической модели была составлена компьютерная программа, позволяющая визуально отображать движение робота в рабочей среде, содержащей препятствия. В программе допускается проведение машинных экспериментов как для стационарной, так и для нестационарной рабочей среды, и предоставляется возможность варьировать местоположение начальной и конечной точек робота, а также число, положение и скорость препятствий.

Применяемый для решения поставленной задачи метод можно отнести к числу глобальных, поскольку робот обладает полной информацией о конфигурации рабочей среды до начала движения благодаря знанию всех необходимых параметров. Это позволяет осуществлять полное вычисление траектории между начальной и конечной точками робота до начала его движения. Для применения глобальных методов необходимо обладать полной информацией о геометрии и динамике окружающей среды, о расположении, форме и законе движения каждого препятствия, т.е. рабочая среда должна быть полностью детерминирована. Локальные методы позволяют строить траекторию, основываясь на частичном знании окружающей среды, при этом планирование движения производится не для всего рабочего пространства робота, а последовательно для нескольких его зон, чаще всего небольших, первая из которых содержит начальную точку, а последняя – конечную точку робота. Однако траектории, полученные с помощью локальных методов, очевидно, могут не быть глобально оптимальными.

Сравнение результатов моделирования по разработанному алгоритму с результатами, полученными при использовании одного из локальных методов, на примере одного неподвижного препятствия, пересекающего отрезок прямой между начальным и конечным положениями робота, показало преимущество первого метода (как с точки зрения оптимальности по времени, так и по другим параметрам, например, по числу переключений двигателя робота). Очевидно, что в данном случае оптимальной будет являться траектория, проходящая по касательным к препятствию и дуге окружности между точками касания. Но при моделировании по локальному методу робот сначала движется с максимальным ускорением в направлении конечной точки, потом он сбрасывает скорость и сворачивает в сторону, чтобы обойти препятствие, после этого, избежав столкновения, опять разгоняется, и, наконец, снова тормозит, чтобы попасть в конечную точку с нулевой скоростью. Это оправдывает адекватность использованной для решения задачи математической модели и достоверность результатов моделирования.

Список литературы

1. Большаков А. А. Управление движением мобильного робота / А. А. Большаков, Д. Л. Лисицкий // Вестник АГТУ. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 1. – С. 12–18.

2. Зайцев В. Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с.

3. Ландау Л. Д. Теоретическая физика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Физматлит, 2007. – Т. 1: Механика. – 224 с.

4. Пшихопов В. Х. Аналитический синтез позиционно-траекторных систем управления подвижными объектами : дис. … д-ра техн. наук / В. Х. Пшихопов. – Таганрог, 2009. – 361 с.

5. Тимофеев А. В. Принципы построения интегрированных систем мульти-агентной навигации и интеллектуального управления мехатронными роботами / А. В. Тимофеев, Р. М. Юсупов // Information Technologies & Knowledge. – 2011. – Vol. 5, № 3. – С. 237–244.

References

1. Bolshakov A. A. Upravlenie dvizeniem mobilnogo robota / A. A. Bolshakov, D. L. Lisickiy // Vestnik AGTY. Ser.: Upravlenie, vychislitelnay tehnika i informatika. – 2011. – № 1. – S. 12–18.

2. Zaytsev V. F. Spravochnik po obyknovennym differencialnym uravneniam / V. F. Zaytsev, A. D. Polanin. – M. : Fizmatlit, 2001. – 576 s.

3. Landau L. D. Teoreticheskaya fizika / L. D. Landau, E. M. Lifshits. – M. : Fizmatlit, 2007. – T. 1: Mehanika. – 224 s.

4. Pshihopov V. H. Analitichesky sintez pozicionno-traektornyh system upravlenia podviznymi objektami : dis. … d-ra tehn. nauk / V. N. Pshihopov. – Taganrog, 2009. – 361 s.

5. Timofeev A. V. Principy postroenia integrirovannyh sistem multi-agentnoy navigacii i intellektualnogo upravlenia mehatronnymi robotami / A. V. Timofeev, R. M. Usupov // Information Technologies & Knowledge. – 2011. – Vol. 5, № 3. – S. 237–244.