

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ**

DOI 10.21672/2074-1707.2021.53.1.054-062  
УДК 519.8, 004.942

### **ФУНКЦИЯ КОББА – ДУГЛАСА ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ МНОГОМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

*Статья поступила в редакцию 09.11.2020, в окончательном варианте – 18.01.2021.*

**Масаев Сергей Николаевич**, Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82,  
кандидат технических наук, ORCID: 0000-0002-5825-2708, e-mail: faberi@list.ru

Высокая скорость прогнозирования состояния объекта исследования двухфакторными математическими моделями делает их сегодня востребованными. В статье точность прогнозирования достигнута за счет выполнения задачи идентификации объекта исследования. Рассмотрена двухфакторная модель Кобба – Дугласа для прогнозирования состояния производственной системы. Обзор работ применения двухфакторной модели Кобба – Дугласа показал, что она востребована и распространена. В современных условиях изменение характера взаимодействия факторов производства под воздействием новых факторов снижает точность прогноза. Рост количества факторов производства и влияние внешней среды затрудняет применение функции Кобба – Дугласа. Изменения взаимосвязи факторов производства образуют новые локальные функции. Установлено, что в сложных динамических объектах важность локальных функций меняется. Изменение взаимодействия факторов производства зависит от влияния внешней среды и определяет динамику развития системы. Предложен алгоритм КОББА расчета двухфакторной модели производственной системы. В авторских методе и программе реализован алгоритм и получены значения производственной функции Кобба – Дугласа. Для оценки взаимодействия факторов производства в работе рассмотрена динамическая система, которая состоит из восьми предприятий. Выполнен классический расчет двухфакторной модели как динамической системы через регрессионное уравнение. Также выполнен расчет трех локальных функций, которые можно использовать в функции Кобба – Дугласа для прогноза. Регрессионное уравнение использовано для оперативного (быстрого) прогнозирования динамической системой с учетом изменения его размерности и влияния параметров внешней среды. Достигнута заданная точность прогноза.

**Ключевые слова:** теория управления, динамическая система, функция Кобба – Дугласа, двухфакторная модель, производственная система, факторы производства, локальная функция, идентификация

### **THE FORECASTING OF STATE MULTI-DIMENSIONAL DYNAMIC SYSTEM BY COBB – DOUGLAS FUNCTION**

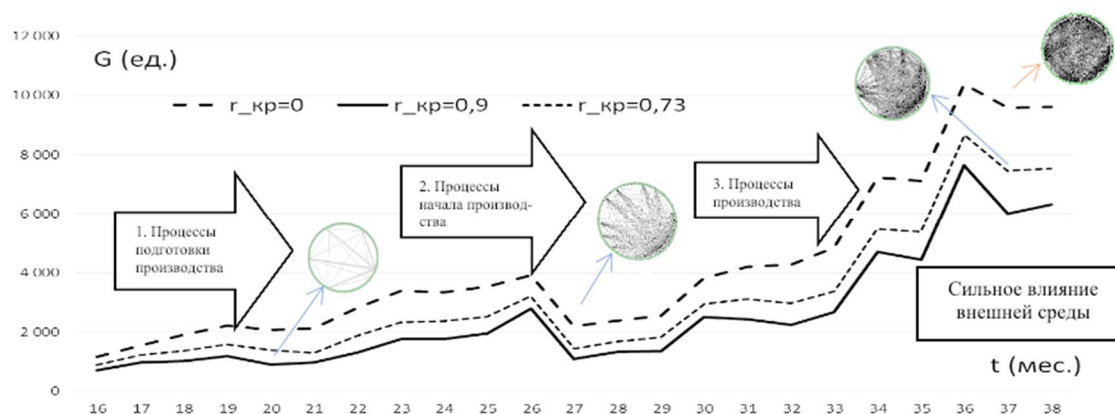
*The article was received by the editorial board on 09.11.2020, in the final version – 18.01.2021.*

**Masaev Sergey N.**, Siberian Federal University, 79, Svobodnyy Ave., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation,  
Cand. Sci. (Engineering), ORCID: 0000-0002-5825-2708, e-mail: faberi@list.ru

The high speed of predicting the state of the research object by two factor mathematical models makes them in demand today. In the article, the forecasting accuracy is achieved by performing the task of identifying the research object. A two-factor Cobb – Douglas model for predicting the state of the production system is considered. A review of researches on the application of the two factorial Cobb – Douglas model showed that it is well known and widespread. In modern conditions, the change in the nature of the interaction of production factors under the influence of new factors reduces the accuracy of the forecast. The growth in the number of factors of production and the influence of the external environment make it difficult to use the Cobb – Douglas function. Changes in the relationship of factors of production form new local functions. It was found that in complex dynamic objects the importance of local functions changes. A change in the interaction of production factors depends on the influence of the external environment and determines the dynamics of the development of the system. An algorithm COBBA for calculating a two factor model of a production system is proposed. In the author's method and program, an algorithm is implemented and the values of the Cobb – Douglas production function are obtained. To assess the interaction of production factors in the research, a dynamic system is considered, which consists of eight enterprises. The classical calculation of the two factor model as a dynamic system through the regression equation is performed. Also we calculated three local functions that can be used in the Cobb – Douglas function for forecasting. The regression equation is used for operational (fast) forecasting by a dynamic system, taking into account changes in its dimension and the influence of environmental parameters. The specified forecast accuracy has been achieved.

**Keywords:** control theory, dynamical system, Cobb – Douglas function, two factor model, production system, factors of production, local function, identification

Graphical annotation (Графическая аннотация)



**Введение.** В начале XX века соединение факторов производства труда и капитала давало наибольший прирост производства. В 1928 г. была предложена статистическая проверка взаимодействия этих факторов [1]. Такая статистическая проверка, двухфакторная модель, получила имя ее создателей производственная функция Кобба – Дугласа [1]. Главное достоинство двухфакторных моделей – это простая методология и быстрота расчета.

Двухфакторными моделями и подобными вопросами занимались Р. Солоу, К. Эрроу, В. В. Леонтьев, С. А. Айвазян, И. В. Елохова, Г. Б. Клейнер, Л. В. Канторович, А. Г. Гранберг, А. Г. Аганбегян, В. Ф. Кротов, В. С. Немчинов и другие [2–11].

В начале XXI века на взаимодействие труда и капитала в математической двухфакторной модели влияет очень много параметров. Например, фактор труд меняет свою структуру из-за механизации, автоматизации и цифровизации (промышленная революция). Капитал приобрел различные формы выражения: криптовалюты, различные виды ценных бумаг, паи и т. д. Кроме того, на взаимодействие труда и капитала одного объекта действует внешняя среда в виде взаимодействий труда и капитала других объектов. Все эти изменения снижают точность прогноза с помощью двухфакторных моделей, в том числе и прогноза функцией Кобба – Дугласа. Несмотря на эти трудности, и они нарастают, стремление человека получить преимущества в прогнозе доступными и быстрыми способами сохраняет функцию Кобба – Дугласа востребованной вот уже около ста лет. С первого взгляда функция Кобба – Дугласа проста, но включает в себя фундаментальные проблемы идентификации параметров объекта исследования, определения его размерности в точках наблюдения.

С учетом сложившихся обстоятельств актуально рассмотреть двухфакторную модель Кобба – Дугласа для прогноза состояния современной производственной системы при влиянии внешних условий.

Цель статьи – рассмотреть двухфакторную модель Кобба – Дугласа в процессе прогнозирования состояния производственной системой.

Для достижения цели необходимо выполнить задачи:

- объединить параметры производственных систем в многомерную динамическую систему;
- рассчитать локальные функции динамической системы на основе взаимосвязанности факторов производства, их формирующих;
- использовать функцию Кобба – Дугласа в ее классическом представлении;
- использовать функцию Кобба – Дугласа с рассчитанными локальными функциями;
- в динамической системе оценить возможность оперативного управления модернизированной функцией Кобба – Дугласа.

Для анализа динамической системы перейдем к формализации используемого подхода.

**Используемый метод.** Взаимодействие факторов производственной системы описывается следующим образом:

$$y = f(x_1, x_2 \dots x_n). \quad (1)$$

Взаимодействие двух факторов в производственной системе представляется как

$$f(x_1, x_2) = const. \quad (2)$$

В 1872 г. В. Джевенс доказал математическое соотношение (2) и им обосновывал доходы производства. В 1930 г. продемонстрирована без доказательств производственная функция математиком Ч. Коббом и экономистом П. Дугласом:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

или

$$Y = A \cdot L^\alpha \cdot K^\beta, \quad (3)$$

где  $Y$  – результат работы объекта;  $A$  – технология производства;  $x_L^\alpha$ ,  $L^\alpha$  – связь  $Y$  от ресурсов, направленных на работу элементов объекта исполнителей  $L$ ;  $x_K^\beta$ ,  $K^\beta$  – зависимость  $Y$  от ресурсов, направленных на совершенствование работы элементов объекта  $K$ ;  $\alpha, \beta$  – коэффициенты эластичности  $Y$  по  $L$ ,  $K$  соответственно. Формула (3) и ее интерпретация выполнена под неизвестный объект. С классической интерпретацией (1)–(6) можно ознакомиться в отдельной работе [1, 5].

Для решения преобразуем модель в линейную форму

$$\ln(Y) = \ln(A \cdot L^\alpha \cdot K^\beta); \quad (4)$$

$$\ln(Y) = \ln(A) + \alpha \ln(L) + \beta \ln(K),$$

$$\ln(Y) = y, \quad \ln(A) = b_0, \quad \alpha = b_1, \quad \ln(L) = x_1, \quad \ln(K) = x_2; \quad (5)$$

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2. \quad (6)$$

Для того чтобы выбрать для расчета значения  $L$ ,  $K$ , необходимо найти наиболее важные элементы в объекте исследования через расчет взаимной корреляции наблюдаемых элементов объекта с учетом изменения его размерности и влияния параметров внешней среды в каждом периоде. Тогда представим объект исследования как динамическую систему

$$y(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + v(t), \quad (7)$$

где  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  – список факторов производства;  $n$  – размерность;  $T = \{t: t = 1, \dots, T_{\max}\}$  – момент наблюдения;  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  –  $n$  – количество факторов производства, где  $x_n(t)$  – значение факторов  $t$  пространства  $X$  в момент  $t$ . В виде фактора производства рассматривает имя бизнес-процесса, выполняемой работы на производстве. Пространство  $X_i$  формируется из  $x_n^i(t)$ . Классическое представление  $X = [X_1, X_2, \dots, X_i]^T$  дано В.Ф. у Кротова [11];

$u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T$  –  $m$  – параметры управления факторами  $x_n(t)$ , где  $u_m(t)$  – управление на фактор  $x_n(t)$  в  $t$ ;

$y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_z(t)]^T$  –  $z$  – наблюдаемые итоговые факторы производства, где  $y_z(t)$  – наблюдаемые итоговые факторы производства отчета в момент  $t$ ;

$$v(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_z(t)]^T$$
 – помеха, действующая на  $x_n(t)$ ;

$A = [a_{ij}]$  –  $n \times n$  – матрица структуры и технологии производственного объекта, задаваемая через  $a_{ij}$  степень влияния факторов производства  $x_i$  и  $x_j$ ;

$B = [b_{ij}]$  –  $n \times m$  – матрица структуры управления, через  $u_m(t)$ , где  $b_{ij}$  – ожидаемое взаимодействие между факторами производства  $x_i$  и  $x_j$ ;

$H = [h_{ij}]$  –  $z \times n$  – матрица наблюдений объекта, позволяющая получить оценку  $y_j(t)$  по фактическому уровню  $x_j(t)$ .

Тогда производственную систему можно рассмотреть как динамическую систему  $S = \{T, X\}$  через матрицу  $X_k(t)$

$$X_k(t) = \begin{bmatrix} x_1(t-1) & x_1(t-2) & \dots & x_1(t-k) \\ x_2(t-1) & x_2(t-2) & \dots & x_2(t-k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n(t-1) & x_n(t-2) & \dots & x_n(t-k) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где  $k$  – определяет количество моментов наблюдения, входящих в интервал анализа.

В отдельной работе динамическая система  $S = \{T, X\}$  (производственной система) идентифицирована как цифровая копия предприятия [12]. Управление предприятием на основе цифровой копии предприятия рассмотрено в отдельных работах по методике управления менеджмента каче-

ства [13] и методике проектного управления [14]. В работе [15] динамическая система представлена как цифровой двойник образовательной организации.

Изменяя величину  $k$ , можно находить краткосрочное и долгосрочное влияние параметров внешней среды. Исследование величины  $k$  для разных параметров внешней среды подробно раскрыто в отдельной работе [16].

Далее для определения взаимного влияния факторов производства (1), (7) друг на друга используем метод интегральных показателей [12]. Взаимное влияние факторов производства для их объединения в локальные функции для подстановки в параметр  $L$  определяется корреляционной матрицей  $R_k(t)$ :

$$R_k(t) = \frac{1}{k-1} X_k^T(t) X_k(t) = \|r_{ij}(t)\|, \quad (9)$$

$$r_{ij}(t) = \frac{1}{k-1} \sum_{l=1}^k x_i(t-l) x_j(t-l), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (10)$$

где  $t$  – моменты наблюдения;  $r_{ij}(t)$  – коэффициенты взаимосвязи факторов динамической системы (коэффициенты корреляции)  $x_i(t)$  и  $x_j(t)$  в  $t$ .

Состояние динамической системы характеризует интегральный показатель на основе корреляционного графа  $G_i(t)$ :

$$G_i(t) = \sum_{j=1}^n |r_{ij}(t)|. \quad (11)$$

Состояние динамической системы за весь период наблюдения рассчитывается как:

$$G = \sum_{t=1}^{T=\max} \sum_{i=1}^n G_i(t). \quad (12)$$

Использование интегрального показателя (11) для управления цифровой копией предприятия рассмотрено в отдельной работе [12].

Реализацию предложенного метода представим в виде алгоритма.

**Алгоритм эксперимента КОББА.** Алгоритм анализа динамической системы выполняется по шагам:

1 шаг. Значения факторов производственной системы  $x_n(t)$  отождествляются с выполняемыми работами, бизнес-процессами, формируем управление, параметры внешней среды и получаем динамическую систему (7). Вычисляем  $G_i(t)$  по всем  $t$ . Из анализа взаимосвязи факторов (12) находим факторы с наибольшим корреляционным весом или объединяем их в локальную функцию по одному выбранному признаку и используем их вместо параметра  $L$  для прогнозного значения  $Y$  (3). Переходим к шагу 2.

2 шаг. Рассчитываем уравнение регрессии по параметрам  $K$ ,  $L$ . По факторам производства можно выполнить оптимальное управление, которое будет влиять на прогноз  $Y$  [17]. Если уравнения регрессии рассчитаны, то переходим к шагу 3, иначе возвращаемся к идентификации значений факторов  $x_n(t)$  в шаге 1.

3 шаг. Проверяем полученный набор прогнозных значений  $Y$  на соответствие нашим требованиям. Если выбранные факторы производства в  $L$  влияют неудовлетворительно на прогноз  $Y$  для пользователя алгоритма, то возвращаемся на шаг 1, иначе конец алгоритма.

**Инструменты выполнения алгоритма КОББА.** Идентификация факторов производства как динамической системы и выбор метода управления ей выполнены по запатентованному способу «Идентификация объекта как системы» (RU 2741138 С1). Решение о выдаче патента ФИПСом от 15.12.2020 по заявке 2019143313 от 23.12.2019.

Расчет шагов алгоритма выполняется в программах. Каждый шаг в алгоритме соответствует номеру программы по порядку:

1. Свидетельство ФИПС на ЭВМ № 2013614410. В программе моделируется объект как система. Задается структура взаимодействия переменных, вырабатывается управляющий сигнал, структура управляющего сигнала, параметры внешней среды.

2. Свидетельство ФИПС на ЭВМ № 2017616973. В программе объединяется выбранный метод контроля режимов работы системы и контур управления ей. Позволяет выбрать удобную форму интерпретации данных по методики управления.

3. Свидетельство ФИПС на ЭВМ № 2008610295. В программе оценивается оптимальность управленческого решения методом Р. Беллмана [17].

Задача реализована по способу и рассчитана в данном комплексе программ.

**Практическая задача.** Требуется выполнить прогноз  $Y$  (3) по сформированным локальным функциям (11) подставив их в параметр  $L$ . Предъявляемая точность к отклонению фактических данных от прогнозных значений не более 15 %.

**Характеристики объекта исследования.** Выполняем первый шаг алгоритма КОББА. Даны параметры: размерность производственной системы  $n = 9,6$  млн факторов производства в 8 предприятиях  $i = 8$ ,  $T = 5$  лет,  $t =$  месяц. Пространство  $X = [X_1, X_i, \dots, X_8]^T$  состоит из двух предприятий деревообработки [18], двух производств изготовления сухих смесей для детей, одного строительного производства, одного нефтехимического производства и двух производств радиотехнических изделий. Каждое предприятие характеризуется основными процессами этапов своего развития за 5 лет: первый и второй год – это инвестиционные процессы формирования производства, третий и четвертый год – это запуск, работа и увеличение объемов производств, пятый год – это работа в одном темпе производства. Данные этапы определяют характер взаимосвязи и производственных функций  $x_n(t)$ . Подробное описание такого взаимодействия в реальном объекте можно посмотреть в работе [18].

Параметры управления в момент  $t$  заданы:  $u_1$  – штраф за превышение привлеченного ресурса над потраченным ресурсом 20 %;  $u_2$  – штраф 30 % на расходуемые ресурсы для выполняемых неавтоматизированных процедур;  $u_3$  – штраф 2 % на расходуемые ресурсы для выполняемых автоматизированных процедур;  $u_4$  – дополнительные ресурсы на 1 кВт/ч. энергии 3,2 усл. ед.;  $u_5$  – 700 усл. ед. за доставку 1 куб. м.;  $u_6$  – штраф за использование территории 200 000 усл. ед. за гектар.

Влияние внешней среды задано через параметры:  $v_1$  – ежегодное + 4 % штрафа за ресурс;  $v_2$  – рост штрафа за неавтоматизированные функции (в моделировании + 4 % ежегодно);  $v_3$  – поступление ресурсов от собственника объекта;  $v_4$  – технологические новинки;  $v_5$  – движение материальных потоков;  $v_6$  – мероприятия по улучшению логистики перемещения ресурсов;  $v_7$  – трудовые ресурсы;  $v_8$  – штрафы за технологию;  $v_9$  – инфляция (в модели 4 % ежегодно);  $v_{10}$  – штраф за привлечение более востребованных ресурсов (в модели принято 1 усл. ед. за 70 усл. ед.). Вопросы ограниченного режима работы из других случайных факторов, например Covid-19, рассмотрены в работе [12, с. 5].

**Результаты расчёта.** Выполняем второй шаг алгоритма КОББА. Моделировалось состояние динамической системы из восьми производств общей размерностью 9,6 млн факторов производства на примере структуры факторов производства [18]. Прогнозные значения  $Y$  рассчитаны на основе параметров, объединенных в локальные функции производственных факторов и подставленных в значения  $L$  (табл. 1).

Таблица 1 – Прогноз состояния динамической системы в зависимости от параметра  $L$  (млрд усл. ед.)

Год	$Y$	$L$	$K$	Наблюдаемые параметры прогноза				Факт
				у_расход ресурса на неавтоматизированные работы	у_общие расходы ресурса	у_расход ресурса на восстановление инструментов выполнения процессов	у_перерабатываемый ресурс	у_факт
1	45,6	23,2	22,7	47,1	42,1	45,6	41,3	45,6
2	25,3	21,4	0,0	35,0	30,2	36,2	30,5	25,3
3	53,3	36,4	0,3	46,3	52,3	57,8	55,1	53,3
4	52,5	34,5	0,0	38,0	41,6	37,1	41,0	52,5
5	54,6	50,1	0,1	60,3	63,3	49,7	61,2	54,6

На основе рассчитанных данных для факторов производства построены уравнения: (у\_расход ресурса на неавтоматизированные работы) –  $Y = 30035 \cdot L^{0,36} \cdot K^{0,02}$ ; (у\_общие расходы ресурса) –  $Y = 187,5 \cdot L^{0,67} \cdot K^{0,02}$ ; (у\_расход ресурса на восстановление инструментов выполнения процессов) –  $Y = 0,00003 \cdot L^{2,23} \cdot K^{0,04}$ ; (у\_перерабатываемый ресурс) –  $Y = 18962 \cdot L^{0,45} \cdot K^{0,04}$ . Динамика прогноза по уравнениям представлена ниже (рис. 1).

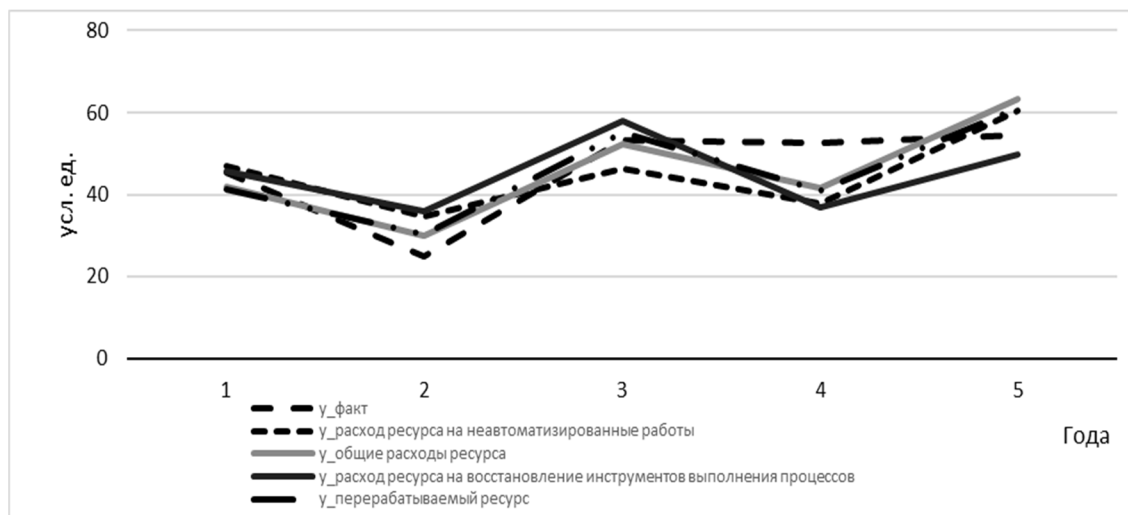


Рисунок 1 – Траектории прогнозных значений по уравнениям регрессии (6)

Выполняем третий шаг алгоритма КОББА. Рассчитанные уравнения проверяем на статистическую значимость (табл. 2).

Таблица 2 – Производственная функция (3)

$L$	Уравнение	$F_{табл}$	$F_{расч}$	Множественный R	Коэффициент детерминации	Сумма отклонений
Общие расходы ресурса	$Y = 187,5 \cdot L^{0,67} \cdot K^{0,02}$	7,71	0,13	0,77	0,59	5 %
Перерабатываемый ресурс	$Y = 18962 \cdot L^{0,45} \cdot K^{0,04}$	7,71	0,50	0,40	0,16	5 %
Расход ресурса на восстановление инструментов выполнения процессов	$Y = 0,00003 \cdot L^{2,23} \cdot K^{0,04}$	7,71	0,91	0,07	0,01	14 %
Расход ресурса на неавтоматизированные работы	$Y = 30035 \cdot L^{0,36} \cdot K^{0,02}$	7,71	0,44	0,45	0,20	12 %

Как видно (рис. 1), уравнения имеют похожую динамику и характеризуют линейное упорядоченное отношение параметров в динамической системе, где факторы производства, формирующие доминирующие локальные линейные функции, ограниченные структурой системы, при влиянии параметров внешней среды. При объединении объектов в динамическую систему доминирующие локальные функции уменьшают прогностические способности функции Кобба – Дугласа для управления динамической системой, так как реакция на влияние параметров внешней среды у них разная. Это подтверждается проверкой уравнений критерием Фишера. Ни одно уравнение с вероятностью 95 % статистически незначимо. Данный факт требует дополнительного обсуждения.

**Обсуждение результатов.** Однако видим (рис. 1), что уравнения (табл. 1) не отклоняются от фактического состояния исследуемого пространства  $X$ . Данное совпадение позволяет утверждать, что есть одинаковая реакция 8 предприятий под влиянием одних и тех же параметров внешней среды. Тогда рассматриваемая динамическая система ограничена взаимоотношением этих 8 предприятий между собой под влиянием факторов внешней среды. Управление задается через выбор значимой локальной функции на основе факторов производства  $x_n(t)$  как параметр  $L$

(табл. 2), которые больше всего имеют взаимосвязь с остальными локальными функциями (факторами производства) в системе. К параметру  $K$  расходу ресурса на перенастройку системы и получение новых свойств системы подбирается параметр  $L$  в зависимости от типа деятельности динамической системы (табл. 1) и в силу динамичности процесса зависит от взаимосвязанности локальных функций относительно друг друга в момент времени  $t$ .

Если предположить, что все предприятия – это однотипные производственные системы, которые имеют высокую степень добавочной стоимости только физических ресурсов и материалов, тогда значение статистической значимости уравнений (3) станет 95 % и даже 99 %. На практике подобные динамические системы (7) состоят из разных производств, поэтому необходимо определять в каждом периоде важность  $G$  (11) локальных функций из взаимодействия факторов производства. Например, для производства высокоточных приборов значимое уравнение будет включать  $L$  из факторов производства локальной функции «расход ресурса на неавтоматизированные работы». Предприятие, производящее сухие смеси детского питания, адекватно характеризуется уравнением по параметрам локальной функции факторов производства «общие расходы ресурса».

Структура взаимодействия параметров динамической системы так устроена, что не зависит от коэффициента значимости  $r_{кр}$ , который рассчитывается по таблице значимости. Это легко проверить. Локальные функции факторов производства сохраняют взаимосвязь относительно друг друга при изменении коэффициента значимости  $r_{кр}$  (определяется по таблице критических значений коэффициентов Пирсона для  $k = 6$  при  $\alpha = 0,95$ ,  $r_{кр} = 0,73$ ). Формула (11) будет иметь вид

$G_i(t) = \sum_{j=1}^n |r_{ij}(t)|$  при  $|r_{ij}(t)| \geq r_{кр}$ . Расчет для  $r_{кр} = 0$ ,  $r_{кр} = 0,1$  или  $r_{кр} = 0,9$  (рис. 2) показывает, что

рассматриваемая динамическая система имеет структуру, определяющую отношения факторов производства, и что их деятельность упорядочена с 1 по 23 период. Тогда можно добиваться различной точности прогноза при выполнении алгоритма эксперимента.

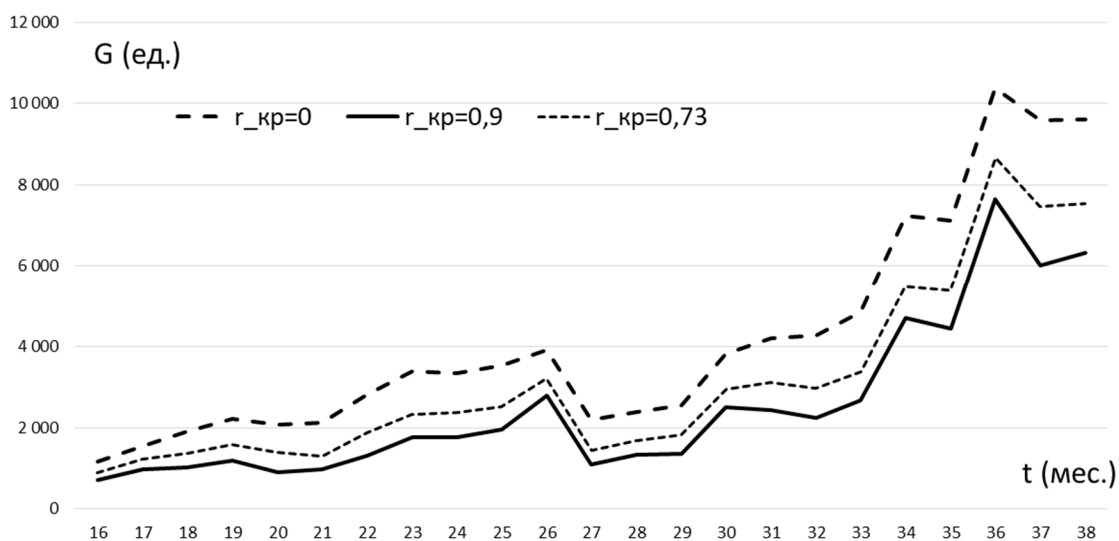


Рисунок 2 – Значение интегрального показателя (11) в зависимости от критического значения  $r_{кр}$

Г.Б. Клейнер отмечал: «...производственная функция – это грубое, приближенное описание». Из этого он полагал, что нет возможности перейти к анализу конкретных комбинаций производственных факторов для их детального анализа при разумных затратах времени. Действительно, для ручного перебора 9,6 млн параметров одним человеком потребовалось бы около 30 тысяч лет. Традиционно это мнение поддерживалось. Однако в нашей работе мы показали, что утверждение Г.Б. Клейнер теряет свою актуальность. Через формулу (10) и формулу (11) возможно установить и анализировать конкретное влияние факторов производства друг на друга.

Прогнозирование состояния динамической системы в будущие моменты времени лучше использовать для укрупненного прогноза – для контура управления на верхнем уровне, где есть ограничение по времени час-два. Оперативное прогнозирование по 9,6 млн факторам производства системы – трудоемкая задача, но с сегодняшним развитием ЭВМ – выполнимая. Достаточно

перейти к оперативному управлению динамической системой по уравнению (1). Следовательно, рационально использовать комбинированное прогнозирование: для укрупненных (стратегических) и быстрых прогнозов функцию Кобба – Дугласа, так как обеспечивается требование по отклонению фактических данных от прогнозных значений не более 15 %. В комбинированном прогнозе уравнение (1) целесообразно использовать для оперативного управления, а уравнение (7) – для более долгого прогнозирования с подробным анализом взаимосвязей производственных факторов.

Статья выполнена в цикле работ по анализу динамических систем в условиях их применения в особых экономических зонах, задач идентификации взаимодействия человеко-машинных систем, децентрализованного управления, гибкого контура управления с выбором методики управления, оценок образовательных организаций и методов, санкций.

**Заключение.** Задачи, поставленные в начале работы, выполнены:

- объединены параметры производственных систем в динамическую систему  $S = \{T, X\}$ ;
- определены локальные функции динамической системы на основе взаимосвязанности факторов производства, их формирующих;
- использована функция Кобба – Дугласа в ее классическом представлении:  $Y = 30035 \cdot L^{0,36} \cdot K^{0,02}$ ;
- использована функция Кобба – Дугласа с вычисленными локальными функциями, подставленными в параметр  $L$  для трех случаев:  $Y = 187,5 \cdot L^{0,67} \cdot K^{0,02}$ ;  $Y = 0,00003 \cdot L^{2,23} \cdot K^{0,04}$ ;  $Y = 18962 \cdot L^{0,45} \cdot K^{0,04}$ ;
- в динамической системе оценена возможность оперативного управления модернизированной функцией Кобба – Дугласа.

Стоит отдельно отметить, что получено комбинированное прогнозирование, в котором уравнение (1) целесообразно использовать для оперативного управления, а уравнение (7) – для более долгого прогнозирования с подробным анализом взаимосвязей производственных факторов.

Выполнена практическая задача исследования через алгоритм КОББА с отклонением прогноза от фактических данных в диапазоне 5–14 %.

Цель, поставленная в начале работы, рассмотреть двухфакторную модель Кобба – Дугласа в процессе прогнозирования состояния современной производственной системы достигнута.

#### **Библиографический список**

1. Cobb C. W. A Theory of Production / C. W. Cobb, P. H. Douglas // American Economic Review. – December, 1928. – P. 139–165.
2. Golestani M. Robust Finite-Time Stabilization of Uncertain Nonlinear Systems Based on Partial Stability / M. Golestani, I. Mohammadzaman, M. J. Yazdanpanah // Nonlinear Dynamics. – 2016. – Vol. 85, no. 1. – P. 87–96.
3. Haddad W. M. Finite-Time Partial Stability and Stabilization, and Optimal Feedback Control / W. M. Haddad, A. L'Afflitto // Journal of the Franklin Institute. – 2015. – Vol. 352, no. 6. – P. 2329–2357.
4. Leontief W. W. The Structure of American Economy, 1919–1939 / W. W. Leontief. – Cambridge: Harvard University Press, 1941.
5. Клейнер Г. Б. Производственные функции: теория, методы, применение / Г. Б. Клейнер. – Москва: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.
6. Немчинов В. С. Потребительная стоимость и потребительные оценки / В. С. Немчинов // Экономико-математические методы. – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – Вып. 1.
7. Аганбегяна А. Г. Экономика России на распутье... Выбор посткризисного пространства / А. Г. Аганбегяна. – Москва: АСТ, Астрель; Владимир: ВКТ, 2010. – 185 с.
8. Гранберг А. Г. Василий Леонтьев в мировой и отечественной экономической науке / А. Г. Гранберг // Экономический журнал ВШЭ. – 2006. – № 3. – С. 471–491.
9. Гранберг А. Г. Основы региональной экономики / А. Г. Гранберг. – 4-е изд. – Москва: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2004. 495 с.
10. Канторович Л. В. Математико-экономические работы / Л. В. Канторович. – Новосибирск: Наука, 2011. – 760 с.
11. Кротов В. Ф. Основы оптимального управления / В. Ф. Кротов. – Москва: Высшая школа, 1990. – 430 с.
12. Msaev S. N. Assessment various control methods a digital copy of enterprise by integral indicator / S. N. Msaev // Journal of Physics: Conference Series / Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. – Krasnoyarsk, 2020. – P. 32011. DOI:10.1088/1742-6596/1679/3/032011.
13. Бережнова А. В. Управление процессами комплексной стандартизации деятельности предприятия: магистерская диссертация: 38.04.01 / А. В. Бережнова. – Красноярск: СФУ, 2016. – Режим доступа: <http://elib.sfu-kras.ru/handle/2311/28693>, свободный. – Заглавие с экрана. – Яз. рус.



14. Евдокименко Е. А. Оценка финансовой деятельности предприятия на основе эффективности бизнес-процессов : магистерская диссертация : 38.04.01 / Е. А. Евдокименко. – Красноярск : СФУ, 2018.

15. Dorrer M. G., The prototype of the organizational maturity model's digital twin of an educational institution / M. G. Dorrer // *Journal of Physics : Conference Series*, 1st International Scientific Conference «ASEDU-2020: Advances in Science, Engineering and Digital Education». – Krasnoyarsk, 2020. – Vol. 1691. – P. 012121. DOI: 10.1088/1742-6596/1691/1/012121.

16. Masaev S. Depth of Planning the State of a Dynamic Discrete System by Autocorrelation Function / S. Masaev // 2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). – Sochi, Russia, 2020. – P. 989–993. DOI: 10.1109/RusAutoCon49822.2020.9208187.

17. Bellman R. *Dynamic programming* / R. Bellman. – New Jersey : Princeton University Press, 1957.

18. Masaev S. N. Acceptable area of optimal control for a multidimensional system / S. N. Masaev, G. A. Dorrer, V. V. Cyganov // *Journal of Physics : Conference Series* / Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. – Krasnoyarsk, 2020. – P. 22091. DOI: 10.1088/1742-6596/1679/2/022091.

### References

1. Cobb C. W., Douglas P. H. A Theory of Production. *American Economic Review*. – December, 1928, pp. 139–165.

2. Golestani M., Mohammadzaman I., Yazdanpanah M. J. Robust Finite-Time Stabilization of Uncertain Nonlinear Systems Based on Partial Stability. *Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 85, no. 1, pp. 87–96.

3. Haddad W. M., L'Afflitto A. Finite-Time Partial Stability and Stabilization, and Optimal Feedback Control. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, vol. 352, no. 6, pp. 2329–2357.

4. Leontief W. W. *The Structure of American Economy 1919–1939*. Cambridge, Harvard University Press, 1941.

5. Kleiner G. B. *Proizvodstvennye funktsii: teoriya, metody, primeneniye* [Production functions: Theory, methods, application]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1986, p. 239.

6. Nemchinov V. S. Potrebitelnaya stoimost i potrebitelnye otsenki [Use value and use ratings]. *Ekonomiko-matematicheskie metody* [Economic and mathematical methods]. Moscow, Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1963, vol. 1.

7. Aganbegyana A. G. *Ekonomika Rossii na raspute... Vybor postkrizisnogo prostranstva* [The Russian economy at a crossroads ... The choice of post-crisis space]. Moscow, AST Publ., Astrel Publ., Vladimir, VKT Publ., 2010, p. 185.

8. Granberg A. G. Vasily Leontiev in world and domestic economic science [Vasily Leontev v mirovoy i otechestvennoy ekonomicheskoy nauke] *Ekonomicheskij zhurnal VSHE* [HSE Economic Journal], 2006, no. 3, pp. 471–491.

9. Granberg A. G. *Osnovy regionalnoy ekonomiki* [Fundamentals of Regional Economics]. 4th ed. Moscow, Publishing House of the Higher School of Economics], 2004, p. 495.

10. Kantorovich L. V. *Matematiko-ekonomicheskie raboty* [Mathematical and economic works]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2011, p. 760.

11. Krotov V. F. *Osnovy optimalnogo upravleniya* [The Basics of Optimal Management]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1990, p. 430.

12. Masaev S. N. Assessment various control methods a digital copy of enterprise by integral indicator. *Journal of Physics : Conference Series*. Krasnoyarsk, 2020, p. 32011. DOI:10.1088/1742-6596/1679/3/032011.

13. Berezhnova A. V. *Upravlenie protsessami kompleksnoy standartizatsii deyatelnosti predpriyatiya* [Management of the processes of integrated standardization of the enterprise]. Krasnoyarsk, Siberian Federal University, 2016.

14. Evdokimenko E. A. *Otsenka finansovoy deyatelnosti predpriyatiya na osnove effektivnosti biznes-protsessov* [Assessment of the financial activities of the enterprise based on the effectiveness of business processes]. Krasnoyarsk, Siberian Federal University, 2018.

15. Dorrer M. G., The prototype of the organizational maturity model's digital twin of an educational institution. *Journal of Physics: Conference Series, Volume 1691, 1st International Scientific Conference «ASEDU-2020: Advances in Science, Engineering and Digital Education»*. Krasnoyarsk, Russian Federation, 2020, p. 012121. DOI:10.1088/1742-6596/1691/1/012121.

16. Masaev S. Depth of Planning the State of a Dynamic Discrete System by Autocorrelation Function. *2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon)*. Sochi, Russia, 2020, pp. 989–993, DOI: 10.1109/RusAutoCon49822.2020.9208187.

17. Bellman R. *Dynamic programming*. New Jersey, Princeton University Press, 1957.

18. Masaev S. N., Dorrer G. A., Cyganov V. V. Acceptable area of optimal control for a multidimensional system. *Journal of Physics : Conference Series*. Krasnoyarsk, Russian Federation, 2020, p. 22091. DOI: 10.1088/1742-6596/1679/2/022091.