

УДК 519.21

**ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
УСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ****Р.М. Зарипов**

Проведена статистическая проверка адекватности логистической модели, описывающей процесс усвоения дисциплины образовательной программы. Показана значимость корреляционной связи между экспериментальными и прогнозируемыми данными, на основе которой сделан вывод об адекватности предложенной модели.

В работе¹ предложена математическая модель усвоения дисциплины образовательного процесса на основе логистического уравнения

$$\frac{dx}{dt} = K \cdot \alpha \cdot x(x-s)(w-x), \quad (1)$$

где dx/dt – скорость усвоения студентом новых знаний, α – коэффициент, характеризующий индивидуальные способности студента, s – базовый уровень знаний, необходимый студенту для изучения предлагаемой дисциплины, w – объем новых знаний, которые должен усвоить студент, K – коэффициент взаимного проникновения, показывающий, как образы и понятия предшествующей дисциплины проникают в образы и понятия изучаемого материала.

Предложенное дифференциальное уравнение решается аналитически. Разделив переменные, в уравнение (1) получим:

$$\frac{dx}{x(x-s)(w-x)} = K \cdot \alpha \cdot dt, \quad (2)$$

или разлагая левую часть уравнения (2) на сумму дробей,

$$\frac{1}{x(x-s)(w-x)} = \frac{-1}{s \cdot w \cdot x} + \frac{1}{s(w-s)(x-s)} + \frac{1}{w(w-s)(w-x)}$$

получаем интегрируемое уравнение

$$\left(\frac{-1}{s \cdot w \cdot x} + \frac{1}{s(w-s)(x-s)} + \frac{1}{w(w-s)(w-x)} \right) dx = K \cdot \alpha \cdot dt \quad (3)$$

После интегрирования уравнения (3) будем иметь

$$\frac{-1}{s \cdot w} \ln x + \frac{1}{s(w-s)} \ln(x-s) - \frac{1}{w(w-s)} \ln(w-x) = K \cdot \alpha \cdot t + \ln C. \quad (4)$$

Постоянную интегрирования C найдем из начальных условий при $t = 0$. Пусть $x(0) = x_0$, что, по сути, представляет начальный уровень знаний студента до начала изучения дисциплины. Подставив это начальное условие в уравнение (4), при $t = 0$ найдем значение постоянного множителя

$$\frac{-1}{s \cdot w} \ln x_0 + \frac{1}{s(w-s)} \ln(x_0 - s) - \frac{1}{w(w-s)} \ln(w - x_0) = \ln C \quad (5)$$

Отсюда с учетом (5) получим

$$t = \frac{1}{K \cdot \alpha} \cdot \frac{1}{s \cdot w \cdot (w-x)} \ln \left(\frac{x_0}{x} \right)^{w-s} \left(\frac{x-s}{x_0-s} \right)^w \left(\frac{w-x_0}{w-x} \right)^s \quad (6)$$

Разрешить это уравнение относительно x несколько затруднительно, поэтому исследуем уравнение (6) графически в координатах: x – ось ординат и $t(x)$ – ось абсцисс в пакете MATHCAD.

Анализ модели был выполнен на примере дисциплины «Алгебра и геометрия», читаемой на I курсе в объеме 72 учебных часов по направлению подготовки 220501 «Управление качеством»². Прогнозируемые оценки на экзаменационных испытаниях в зависимости от начальной подготовки студентов были получены при следующих предположениях: все студенты имеют средний индекс (IQ) $\alpha = 0,033$, коэффициент проникновения предшествующей дисциплины школьного курса математики составляет 0,42, базовый уровень знаний соответствует знанию 60 % школьного курса математики. Начальные знания: $x_5(0) = 0,91$ – отличные, $x_4(0) = 0,8$ – хорошие, $x_3(0) = 0,73$ – удовлетворительные и $x_2(0) = 0,5$ – неудовлетворительные. Объем новых знаний, которые должен усвоить студент, составляет $w = 3,25$. Тогда с учетом перечисленных показателей уравнение (6) примет следующий вид:

$$t = \frac{1}{K \cdot \alpha} \cdot \frac{1}{s \cdot w \cdot (w - x)} \ln \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3,25-0,6} \left(\frac{x-s}{x_0-s} \right)^{3,25} \left(\frac{w-x_0}{w-x} \right)^{0,6} \quad (7)$$

Относительная динамика усвоения дисциплины в зависимости от начальных знаний студентов, рассчитанная по формуле (7), показана на рис. 1.

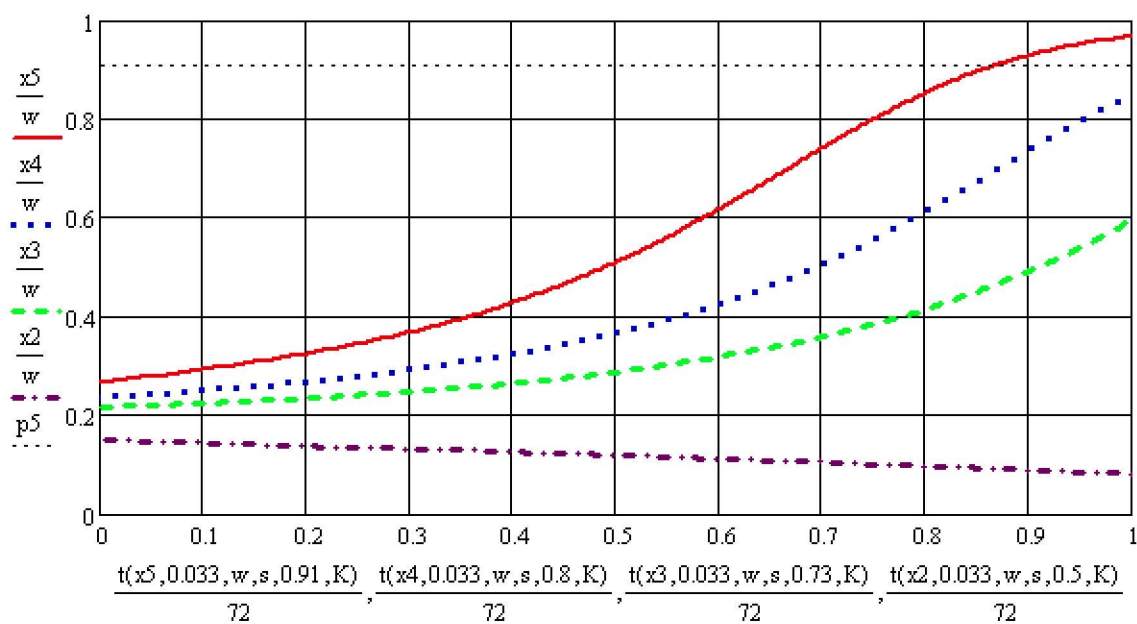


Рис. 1. Динамика усвоения дисциплины в зависимости от начальных знаний студентов

Студенты, имеющие отличные начальные знания $x_5(0)$, отработав время, предусмотренное учебным планом, отлично выдержат экзаменационные испытания, зависимость x_5/w попадает в промежуток от 0,909 до 1, соответствующий отличной оценке. Соответственно, студенты с хорошим уровнем начальной подготовки $x_4(0)$ хорошо выдержат экзаменационные испытания, линия x_4/w попадает в интервал от 0,8 до 0,909, характеризующий хорошее усвоение материала. Студенты с удовлетворительным уровнем начальной подготовки $x_3(0)$ в среднем удовлетворительно выдержат экзаменационные испытания, кривая x_3/w попадает в интервал от 0,6 до 0,8, соответствующий удовлетворительной оценке. Студенты при начальных фактических знаниях ниже удовлетворительного уровня не выдержат экзаменационных испытаний. Данные результаты использованы для оценки адекватности логистической модели и сгруппированы в таблице.

Таблица

Экспериментальные данные, используемые для оценки адекватности логистической модели

Ф.И.О.	Оценка в аттестате зрелости по математике	Прогнозируемая оценка на экзамене по дисциплине «Алгебра и геометрия»	Экзаменационная оценка по дисциплине «Алгебра и геометрия»
1. Ходаева Настя	5	5	5
2. Григорьева Света	5	5	5
3. Мячнева Оксана	5	5	5
4. Куранов Денис	4	4	4
5. Хлопкова Наталья	5	5	5
6. Попов Максим	3	3	3
7. Фрицлер Олеся	4	4	4
8. Чванов Антон	4	4	4
9. Куданова Алия	4	4	4
10. Лейнерт Артем	4	4	4
11. Сорокина Катя	5	5	5
12. Михеева Галя	5	5	5
13. Юрьева Елена	4	4	3
14. Датская Ольга	4	4	4
15. Утюбаев Равиль	4	4	3

Экспериментальные данные – это оценки, полученные студентами группы УК-41 на экзамене по дисциплине «Алгебра и геометрия» на I курсе и приведенные в четвертом столбце таблицы. Прогнозируемые оценки на экзамене по дисциплине «Алгебра и геометрия» приведены в третьем столбце таблицы и, как следует из графиков динамики усвоения дисциплины, совпадают с итоговыми оценками в аттестате зрелости.

Проверялись две статистические гипотезы: нулевая гипотеза H_0 – корреляционная связь между экзаменационными и прогнозируемыми оценка не значима и альтернативная гипотеза H_1 – корреляционная связь между экзаменационными и прогнозируемыми оценка значима. Проверка проводилась на уровне значимости 0,05, объем выборки $n = 15$. На основе данных таблицы составлена корреляционная матрица, в первой строке которой приведены прогнозируемые оценки, а во второй строке оценки, полученные на экзамене. Расчет коэффициента корреляции выполнен в пакете «MATHCAD» и приведен ниже

$$\underline{\text{ORIGIN}} := 1 \qquad n := 15 \qquad i := 1..15$$

$$XY := \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X_c := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{15} XY_{1,i}$$

$$D_x := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{15} (XY_{1,i} - X_c)^2$$

$$Y_c := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{15} XY_{2,i}$$

$$D_y := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{15} (XY_{2,i} - Y_c)^2$$

$$r_{\text{ww}} := \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{15} [(XY_{1,i} - X_c) \cdot (XY_{2,i} - Y_c)]}{\sqrt{D_x \cdot D_y}} \quad r = 0.896$$
$$r^2 = 0.804$$

Проверка статистических гипотез осуществлялась с помощью критерия Стьюдента с надежностью 0,95 и для числа степеней свободы $k = 13$, которая приведена ниже в пакете «MATHCAD»

Проверка значимости коэффициента корреляции.

$$t_n := \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$t_n = 7.293$$

$$\alpha := 0.05 \quad k_{\text{ww}} := 13 \quad \gamma := 0.95 \quad t_{\gamma, k} = 2.16$$

Наблюдаемое значение статистики $t_n = 7,293$ превышает его критическое значение $t_{\gamma, k} = 2,16$, нулевая гипотеза H_0 отвергается и принимается альтернативная гипотеза о значимости корреляционной связи³.

Следовательно, математическая модель, в основе которой лежат логистические уравнения, адекватно описывает процесс усвоения дисциплины студентами.

¹ *Зарипов Р.М., Холодов Ю.В.* Математическая модель усвоения дисциплины в образовательном процессе // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. 2008. № 1.

² Учебный план специальности 340100 (220501) Управление качеством. Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2005.

³ *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ, 2004. 573 с.

УДК 681.3.06

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

Р.М. Зарипов, Ю.В. Холодов

Предложена математическая модель усвоения дисциплины на основе логистического уравнения. Модель ориентирована на асинхронную организацию учебного процесса. Модель раскрывает взаимосвязи начального уровня подготовки студента и базовых знаний, необходимых для изучения дисциплины, образовательных кредитов и влияние интеллектуальных способностей студента на скорость усвоения нового материала.

Для современного общества характерна устойчивая тенденция, направленная на формирование единого образовательного пространства среди европейских государств. В связи с этим системы высшего образования должны стать максимально открытыми, сопоставимыми друг с другом, что достигается посредством распространения однотипных обра-