

УДК 532.522+681.3

## АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИКИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОТОКОВ В НАКЛОННЫХ КАНАЛАХ

Статья поступила в редакцию 04.05.2016, в окончательном варианте – 18.07.2016.

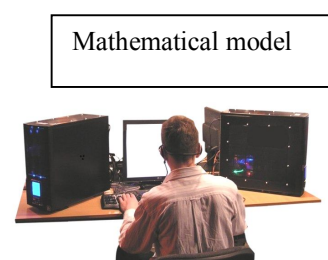
**Мекенбаев Бактыбек Т.**, кандидат физико-математических наук, Кыргызский государственный университет строительства, транспорта и архитектуры имени Н. Исанова, 720020, Кыргызская Республика, г. Бишкек, ул. Малдыбаева, 34Б, e-mail: mekenbt@mail.ru

**Дуишеналиев Чингиз Т.**, инженер, ООО «SkyMobile», 720077, Кыргызская Республика, Ак-Орго, г. Бишкек, ул. Бекбекей, 52, e-mail: choga.mizuno@mail.ru

Основной целью настоящей работы является получение точных аналитических решений для уравнения «мелкой воды» применительно к некоторым природным явлениям. Предложено автомодельное решение классической теории мелкой воды над ровным дном в рамках модели идеальной жидкости. Показано что, рассматриваемый метод решения обобщается на моделирование течения грунтового потока в наклонных каналах с учетом трения или без трения на дне. Новое решение задачи для наклонных каналов получено после перехода в систему координат, движущуюся с ускорением. Анализ решений показывает, что уравнения мелкой воды, при течении потока над ровным дном (в горизонтальных и наклонных каналах) с учетом трения на дне или без трения, позволяют получить скорость потока. Она описывается линейным уравнением, а высота потока – квадратичным уравнением. Рассмотрены возможные направления применения информационных технологий для автоматизации использования описанных расчетных методик.

**Ключевые слова:** мелкая вода, трение, автомодельное решение, канал, течение, жидкость, водонасыщенный грунтовой поток, скорость потока, мощность потока, моделирование, информационные технологии

### Графическая аннотация (Graphical annotation)



## SELF-SIMILAR SOLUTIONS OF GRAVITATIONAL FLOWS DYNAMICS IN INCLINED CHANNELS

The article has been received by editorial board 04.05.2016, in a final version – 18.07.2016.

**Mekenbaev Baktybek T.**, Ph.D. (Physics and Mathematics), Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture named after N. Isanov, 34B Maldybaev St., Bishkek, 720020, Kyrgyz Republic, e-mail: mekenbt@mail.ru

**Duishenaliev Chingiz T.**, Engineer, LLC «Sky Mobile», 52 Bekbekey St., Bishkek, Ak-Orgo, 720077, email: choga.mizuno@mail.ru

The main purpose of this work is to obtain exact analytical solutions of "shallow water" equations for natural phenomena. In this paper the authors propose a self-similar solution of the classical theory of shallow water on a flat bottom in the model of an ideal fluid. It is shown that the proposed method of solution is generalized to simulate the flow of groundwater flow on inclined channels taking into account the friction or without friction at the bottom. A new solution to the problem on the inclined channels is obtained after the transition to a coordinate system moving with acceleration. The analysis of the solutions shows that the shallow water equations at a current flow over a flat bottom (in horizontal and inclined channels), taking into account the friction on the bottom or without friction, allow to obtain the flow velocity which is described by a linear equation and the flow height is described by a quadratic equation. The article considers the possible directions of information technologies application for the automatization of described estimated techniques usage.

**Keywords:** shallow water, friction, self-similar solution, channel flow, flow, liquid, water-saturated ground flow, flow velocity, flow rate, modeling, information technologies

Кыргызстан достаточно уязвим в отношении негативных явлений, вызываемых неблагоприятными природными условиями, включая землетрясения, оползни, лавины и наводнения. В последние годы отмечается рост не только масштабов и интенсивности природно-техногенных катастроф, но также и величины наносимого ущерба. Все это отрицательно сказывается на социально-экономическом развитии республики, отвлекая огромные финансовые средства на устранение последствий таких катастроф. Предотвращение

таких катастроф должно основываться на рациональных мерах технического и организационного характера. Оно может быть значительно менее затратным, чем величины ущербов от катастроф. В свою очередь такие меры должны опираться на адекватные и достаточно простые расчетные методики, в т.ч. доступные для инженеров при разработке проектных решений.

Решение задач, связанных с движением свободных потоков жидкости в каналах, фильтрацией жидкости в грунтах земляных плотин и дамб, а также оценкой движения водных потоков и водонасыщенных масс грунта при разрушении таких плотин (дамб) необходимо при проектировании и анализе рисков эксплуатации различных гидротехнических сооружений, а также при оценке необходимости использования и целесообразных объемов «защитных мероприятий». Задачи указанных классов могут решаться как численно (на ЭВМ), так и с использованием аналитических методов. Последние обычно позволяют получить расчетные соотношения лишь для некоторых упрощенных условий (постановок задач). При этом для ряда задач рассматриваемых классов аналитические решения разработаны в недостаточной степени. Поэтому в данной работе ставилась **цель:** представить аналитические решения для некоторых частных, но практически важных задач. В свою очередь использование таких решений позволит разработчикам оптимизировать проектные решения с учетом выполнения условий необходимости и достаточности» защитных мер.

**Постановки задач движения гравитационных потоков в наклонных каналах и их аналитические решения.** При решении задач движения гравитационных потоков на наклонном основании, фильтрации грунтовых вод на наклонных водоупорах и т.п. могут быть применены как численные, так и аналитические методы. Преимуществом численных методов считается возможность использования постановок задач с меньшим количеством упрощений. При этом могут применяться как метод конечных разностей (МКР), так и метод конечных элементов (МКЭ). Однако даже в случае МКР расчетные соотношения для реализации математических моделей оказываются достаточно сложными [10]. Кроме того, в рамках МКР имеются технические трудности с описанием наклонной формы водоупора (например, в канале) и учета подвижной свободной поверхности жидкости для нестационарных задач. Хотя МКЭ обладает значительно лучшими возможностями для описания сложных границ потоков, но этот метод сложнее в программной реализации [10, 12] и он менее интуитивен. Кроме того, оба метода требуют достаточно высокой квалификации лиц, проводящих численное моделирование – даже при наличии готовых программных средств для этих целей.

В то же время для инженера-проектировщика часто достаточно оценить параметры процессов или необходимые характеристики гидротехнических сооружений лишь приближенно, хотя бы потому, что исходные данные для расчетов нередко известны лишь неточно. При этом по сравнению с численными методами использование достаточно простых инженерных решений в виде аналитических выражений (формул) является предпочтительным по сравнению с численными методами, т.к. дает возможность быстро сравнить несколько вариантов и выбрать лучший из них (с учетом заданных ограничений и выбранного критерия оптимальности).

Еще одним направлением использования аналитических решений является их применение для проверки корректности результатов численных решений – путем сравнения результатов в некоторых «предельных» случаях, для которых могут быть получены точные аналитические решения.

Основной математической моделью, описывающей динамику перемещения потоков жидкости в каналах, является система уравнений динамики мелкой воды. Такие уравнения относятся к классу нелинейных уравнений в частных производных и их аналитические решения возможны лишь в частных случаях и/или при наличии существенных упрощающих предположений.

Рассмотрим канал постоянного поперечного сечения с горизонтальным дном, простирающийся до бесконечности вдоль оси  $x$ . В этом канале в поле силы тяжести течет поток несжимаемой жидкости, положение поверхности которого показано на рисунке 1 в виде продольного профиля.

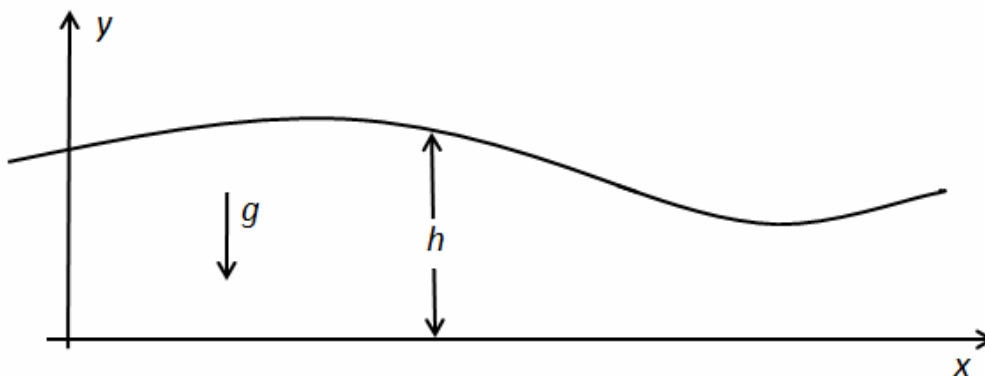


Рисунок 1 – Расчетная схема для потока в канале

Предположим, что этот поток лишен внутреннего трения, трения о стенки и дно канала, а уровень жидкости (или мощность) потока над дном канала  $h$  является малой величиной по сравнению с характерными размерами течения, размерами неровностей дна и т.п. Таким образом, течение жидкости характеризуется одной пространственной переменной  $x$  и зависит от времени  $t$ , т.е. будет решаться нестационарная задача.

Ниже мы рассмотрим автомодельное решение для уравнения мелкой воды в случае распространения потока жидкости. Система уравнений мелкой воды содержит уравнение неразрывности и динамическое уравнение на основе закона сохранения импульса [4, 11]:

$$\begin{cases} \partial h / \partial t + \partial(hu) / \partial x = 0, & t > 0, \quad -\infty < x < \infty \\ \partial u / \partial t + u \partial u / \partial x + g \partial h / \partial x = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $u$  – скорость течения жидкости.

Будем искать решение системы (1), предполагая, что задача является, так называемой, автомодельной [1]. Явление, развивающееся во времени, называется автомодельным, если распределения его характеристик в разные моменты времени получаются как следующие одно из другого, преобразованием подобия [1]. Автомодельность позволяет во многих случаях свести задачу к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (или систем таких уравнений). Это существенно упрощает методы решения задач, позволяет получить результаты в виде аналитических формул.

Автомодельные решения позволяют выявить свойства новых явлений и процессов. Кроме того, такие решения могут использоваться как «эталон» при оценке точности приближенных методов решения сложных задач. В случае уравнений, зависящих от одной пространственной переменной, автомодельность означает выбор нового масштаба координаты  $l(t)$  и решения  $u(x,t)$  таким образом, что в новых координатах решение является функцией лишь одной переменной  $\varepsilon$  [9].

Примем дробь:

$$\varepsilon = x / t \quad (2)$$

в качестве новой независимой переменной. Учтем связь между дифференциальными операторами по старым переменным  $x, t$  и новой переменной  $\varepsilon$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) = \left( \frac{1}{t} \right) \frac{d}{d \varepsilon}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) = - \left( \frac{x}{t^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} = - \left( \frac{\varepsilon}{t} \right) \frac{d}{d \varepsilon}. \quad (3)$$

Подставляя эти выражения в уравнение(1) и, умножая на  $t$ , получим систему двух линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} (u - \varepsilon) \frac{dh}{d \varepsilon} + h \frac{du}{d \varepsilon} = 0, \\ g \frac{dh}{d \varepsilon} + (u - \varepsilon) \frac{du}{d \varepsilon} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Разрешив эти уравнения относительно  $u - \varepsilon$  и  $h$ , получим:

$$u - \varepsilon = -g \left( \frac{dh / d \varepsilon}{du / d \varepsilon} \right), \quad (5)$$

$$h = g \left( \frac{dh / d \varepsilon}{du / d \varepsilon} \right)^2. \quad (6)$$

Здесь и далее мы будем считать, что

$$du / d \varepsilon \neq 0.$$

Учтем правило дифференцирования сложных функций, т.е.

$$dh / d \varepsilon = (\partial h / \partial u) (du / d \varepsilon). \quad (7)$$

Уравнения (5) и (6) можно представить в виде:

$$u - \varepsilon = -g (dh / du), \quad (8)$$

$$h = g (dh / du)^2. \quad (9)$$

Из уравнений (8) и (9) получим следующее выражение, которое связывает мощность потока с его скоростью:

$$h = (u - \varepsilon)^2 / g. \quad (10)$$

Несложная проверка показывает, что определитель системы дифференциальных уравнений (4) при использовании (10) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} u - \varepsilon & h \\ g & u - \varepsilon \end{vmatrix} = 0.$$

Преобразование уравнения (10) дает характеристики дифференциальных уравнений:

$$\varepsilon = u \pm c, \quad (11)$$

где  $c = \sqrt{gh}$  – волновая скорость.

Продифференцировав (10) по  $\varepsilon$ , получим:

$$du/d\varepsilon = 2/3.$$

Отсюда получим выражение для скорости потока:

$$u = (2/3)\varepsilon + d_o, \quad (12)$$

здесь  $d_o$  – постоянная интегрирования.

Подстановка (12) в (10) дает выражение для определения высоты потока жидкости в следующем виде:

$$h = 1/(9g)(3d_o - \varepsilon)^2. \quad (13)$$

Разрешив уравнения (12) и (13) относительно  $\varepsilon$  и  $d_o$ , получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= u \pm c, \\ d_o &= (u \mp 2c)/3. \end{aligned}$$

Здесь выражение в скобках – это инварианты Римана.

Таким образом, постоянная интегрирования равна:

$$d_o = (1/3)I_{\pm},$$

где  $I_{\pm}$  – инварианты Римана.

**Задача об обрушении грунтовой плотины.** Для грунтовых плотин (гидроэлектростанций, накопителей воды для полива сельскохозяйственных угодий, шламонакопителей и пр.) причины обрушений могут быть следующие: сейсмические воздействия на сооружения, большие по величине, чем расчетные значения, принятые инженерами-проектировщиками; уровень жидкости в гидротехническом сооружении, превышающий расчетную величину; появление на заднем скате плотины участка высачивания – в т.ч. из-за отсутствия противофильтрационного «ядра» плотины, неэффективности работы дренажных систем в теле плотины и пр. При разрушении плотины образуется водный поток, распространяющийся вниз по течению. Кроме того, водонасыщенная масса грунта, составлявшего тело плотины, также может распространиться на некоторое расстояние, причем она несет с собой значительную кинетическую энергию.

Аналитическое решение задачи обрушения плотины известно для водного потока над ровным дном [8] для канала постоянного поперечного сечения, простирающегося до бесконечности в обе стороны и имеющего тонкую вертикальную перегородку в сечении  $x = 0$ .

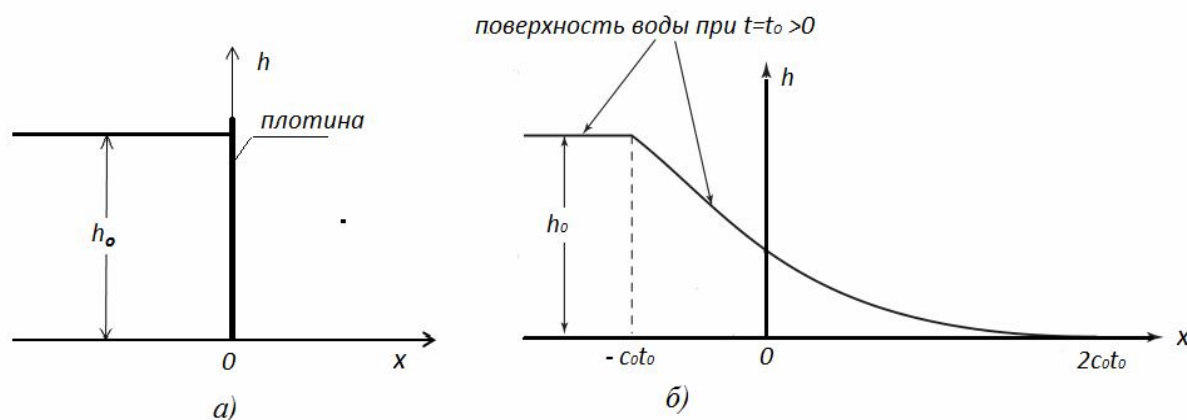


Рисунок 2 – Схемы к задаче разрушения плотины: а) до ее обрушения, б) после обрушения

Это, конечно, упрощение, т.к. реальные земляные плотины имеют наклонные передний и задний скаты, а ядро плотины, как правило, состоит из слабопроницаемого материала. В ряде случаев имеется также «зуб» в основании плотины, уходящий до уровня водоупора (с целью перекрытия фильтрационно-

го потока грунтовых вод под плотиной/дамбой). Часто используется и дренажная система на заднем скате плотины для устранения участка высачивания. Иногда применяется «задерновывание» заднего откоса плотины не только для укрепления грунта, но и увеличения испарения влаги из тела плотины в воздух.

В начальный момент времени  $t = 0$ , при  $x < 0$ , жидкость имеет высоту  $h(x, 0) = h_0(x)$ , а при  $x > 0, h(x, 0) = 0$ , скорость потока  $u(x, 0) = 0$ .

Для области  $x < 0$  (см. рис. 2б) начальные данные при  $t = 0$  в уравнениях (12), (13) имеют вид  $u(x, 0) = 0$  и  $c = c_0$ . В области ограниченной справа характеристикой с уравнением  $x_L = -c_0 t$ , жидкость покоится и  $c = c_0$  при всех  $t > 0$  [6].

При  $\varepsilon = x/t \leq 0$ , постоянная интегрирования равна:

$$d_0 = (2/3)c_0$$

и решения, которые удовлетворяют начальным условиям ( $u(x, 0) = 0$  и  $h(x, 0) = h_0$ ), имеют вид:

$$u = (2/3)(x/t + c_0),$$

$$h = 1/(9g)(2c_0 - x/t)^2,$$

где  $c_0 = \sqrt{gh_0}$ .

Как видно, функция  $h(x)$  в точке  $x = 0$ , терпит разрыв. При  $t > 0$  такой разрыв мгновенно сглаживается (это, конечно, упрощение), а поверхность части жидкости, находящейся в движении, принимает форму параболы, касающейся оси  $x$  (т.е. дна) в точке  $x_R = 2c_0 t$ . Указанная парабола проходит от фронта волны до точки  $x_L = -c_0 t$ , после которой поверхность жидкости становится горизонтальной (см. рис. 2б).

Теперь рассмотрим случай, когда плоский оползень скользит вдоль наклонной плоскости (рис. 3). Применительно к рассматриваемым задачам это соответствует постановке задачи о движении водонасыщенной массы тела разрушившейся плотины. Предполагается, что поток водонасыщенной грунтовой массы однороден по высоте, как в идеальной жидкости.

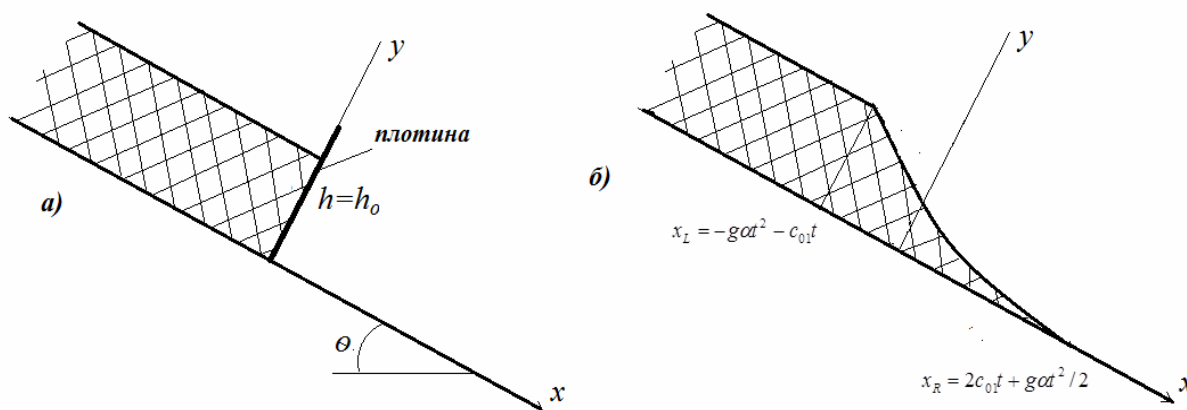


Рисунок 3 – Поток на наклонной плоскости: а) до обрушения плотины, б) после обрушения

Для моделирования движения грунтового потока, в качестве исходной, была взята модель уравнений мелкой воды, учитывающая турбулентное трение о дно, которая также использует осредненное по слою значение скорости. Данная модель движения оползневого потока основана на гидравлическом подходе («теории мелкой воды») [2, 3, 11]. Это означает, что продольный масштаб изучаемого явления должен быть много больше глубины потока и что рассматриваются средние по поперечному сечению параметры потока. Поток рассматривается как тонкий, однородный (плотность, коэффициенты гидравлического и «сухого» трения постоянны) слой несжимаемой жидкости. Считается, что в начальный момент смещающаяся часть грунтового массива мгновенно дробится и превращается в «жидкость», которая затем «стекает» по склону (движение возникает из состояния покоя) – рисунок 3. Склон переменной крутизны, длинный и широкий. Эффектами, связанными с взаимодействием с воздухом на боковых границах потока, можно пренебречь. Движение потока подвержено действию силы тяжести и силы трения.

Таким образом, среда, из которой состоит оползень, предполагается однородной и несжимаемой, а ее движение – турбулентным. Трение входит в уравнения интегрально в виде трения о дно. Поток взаимодействует с внешней средой только на дне (захват массы, трение). Взаимодействием потока на свободной поверхности с внешней средой пренебрегают (так как перемешивание практически отсутству-

ет из-за большой разницы в плотностях воздуха и оползневой массы, а трение о воздух мало). Дополнительный захват пород по пути движения оползня будем считать малым по сравнению с его начальной массой. Предполагается также, что нет внешних притоков массы (рис. 3).

Основные уравнения оползневой массы с однородной вертикальной структурой, движущейся под действием силы тяжести и кулоновского трения (модель Саваге – Хутера) в узком канале в системе координат, привязанной к топографии канала, имеют вид [5, 7, 15]:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = g \alpha, \end{cases} \quad (14)$$

где  $\theta$  – угол наклона поверхности скольжения,  $\mu = tg(\varphi)$  – коэффициент кулоновского трения,  $\varphi$  – динамический угол трения;  $\alpha = \sin \theta - \mu \cos \theta$ . Величина  $\varphi$  зависит от материала оползня. В частности, для лавин, сходящих с вулканов, она оценивается в  $17^\circ$ – $35^\circ$  [5, 7].

Эти уравнения отличаются от известных уравнений мелкой воды только диссипативным членом, который для воды обычно принимается в виде квадратичного условия для трения. В дальнейшем наклон откоса предполагается постоянным и достаточным для начала движения потока ( $\theta > \varphi$ ) [5, 15].

Аналитическое решение этой задачи известно для водного потока над ровным дном. Этот анализ был использован в [13, 14] для оползневой массы над наклонной плоскостью в присутствии кулоновского трения. Фактически новое решение получено из старого – после перехода в систему координат, движущуюся с ускорением.

Начальным условием в задаче о разрушении плотины является отсутствие скорости течения и резкий перепад глубины потока от 0 до  $h_0$ .

Здесь решение (14) получаем после перехода в систему координат, движущуюся с ускорением [5, 7, 15]:

$$\begin{cases} X = x - gat^2 / 2, \\ \tilde{t} = t. \end{cases} \quad (15)$$

Связь между дифференциальными операторами по старым переменным  $x, t$  и новыми переменными  $X, \tilde{t}$  выглядит так:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial X}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial X}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial X}.$$

В дальнейшем знак тильды над символом  $t$  будем опускать.

Далее скорость потока представим в виде:

$$u = v + gat. \quad (16)$$

В приведенном примере абсолютное движение потока равно алгебраической сумме переносного ( $gat^2/2$ ) и относительного ( $X$ ) движений, а абсолютная скорость равна сумме переносной скорости ( $gat$ ) и относительной скорости ( $v$ ).

С учетом (15) и (16) система уравнений (14) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial X} + h \frac{\partial v}{\partial X} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial X} + g_1 \frac{\partial h}{\partial X} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

где  $g_1 = g \cos \theta$ .

Сравнивая (1) и (17) видим, что эти системы уравнений отличаются только коэффициентами  $g$  и  $g_1$ . Относительное движение потока в данном случае такое же, как и в вышеприведенном случае, т.е. на ровном горизонтальном дне без трения. Поэтому для решения системы уравнений (17) можно применить описанный выше способ.

Приняв в качестве независимой переменной:

$$\varepsilon_1 = X / t, \quad (18)$$

систему уравнений преобразуем к виду:

$$\begin{cases} (v - \varepsilon_1) \frac{dh}{d\varepsilon_1} + h \frac{dv}{d\varepsilon_1} = 0, \\ g_1 \frac{dh}{d\varepsilon_1} + (v - \varepsilon_1) \frac{dv}{d\varepsilon_1} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

После несложных преобразований, из (19) получим:

$$\begin{aligned} v - \varepsilon_1 &= -g_1 (dh / dv), \\ h &= g_1 (dh / dv)^2. \end{aligned}$$

Возведем обе части первого уравнения (из этих двух) в квадрат и, подставляя во второе уравнение, получим связь мощности потока с относительной скоростью для данной задачи:

$$h = (v - \varepsilon_1)^2 / g_1. \quad (20)$$

Находя производную  $h$  по  $\varepsilon_1$ , как и ранее, получим дифференциальное уравнение:

$$dv / d\varepsilon_1 = 2/3.$$

Его интегрирование дает выражение для относительной скорости:

$$v = 2/3\varepsilon_1 + d_1, \quad (21)$$

где  $d_1$  – постоянная интегрирования.

Возвращаясь в первоначальную систему координат  $(x, t)$ , из (20) и (21) найдем скорость и высоту потока:

$$u = 2(x/t + g\alpha t) / 3 + d_1 \quad (22)$$

$$h = (3d_1 - x/t + g\alpha t / 2)^2 / (9g \cos \theta). \quad (23)$$

Из (20) и (21) также получим выражение для характеристики и постоянной интегрирования:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= v \pm c_1, \\ d_1 &= (v \mp 2c_1) / 3 = I_{1\pm} / 3, \end{aligned}$$

где  $c_1 = \sqrt{g \cos \theta h}$ ;  $I_{1\pm}$  – инварианты Римана для данной задачи.

Начальные условия в момент времени  $t=0$  удовлетворяют следующим условиям:  $h(x, 0) = h_0(x)$  и  $u(x, 0) = 0$  и позволяют определить постоянную интегрирования  $d_1$ . Для относительного движения:  $h(X, 0) = h_0(X)$  и  $v(X, 0) = 0$ . Для области  $X < 0$  ( $\varepsilon_1 \leq 0$ ) начальные данные при  $t = 0$ , имеют вид  $v(X, 0) = 0$ ,  $c = c_0$ .

В области определенности  $X = -c_0 t < 0$ . Тогда

$$d_1 = (2/3)c_{01},$$

где  $c_{01} = \sqrt{g \cos \theta h_0}$ .

Скорость и высота потока для данного случая в системе координат  $(x, t)$  окончательно трансформируются к виду:

$$u = 2(x/t + g\alpha t + c_{01}) / 3, \quad (25)$$

$$h = (2c_{01} - x/t + g\alpha t / 2)^2 / (9g \cos \theta). \quad (26)$$

Такие же результаты были получены в работе [14] методом характеристик.

В этом случае возникают два фронта потока: правый фронт нулевой толщины  $x_R = 2c_{01}t + g\alpha t^2 / 2$  и левый фронт толщиной  $h_0 - x_L = g\alpha t^2 / 2 - c_{01}t$ .

В работах [5, 7, 15] были получены аналитические решения для потока в наклонных каналах параболического сечения. При этом было показано, что пространственная структура потоков может быть весьма разнообразной, а поперечная форма каналов существенно влияет на темпы нелинейной деформации оползневого тела. Канал в поперечном сечении имеет параболическую форму  $y(z) \sim |z|^m$  (площадь поперечного сечения канала, занятого потоком,  $S \sim h^{(m+1)/m}$ ) и  $m > 0$  (рис. 4).

Уравнения неразрывности и закон сохранения импульса оползневого потока в наклонных каналах имеют вид [5, 7, 15]:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{m}{m+1} h \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = g\alpha, \end{cases} \quad (27)$$

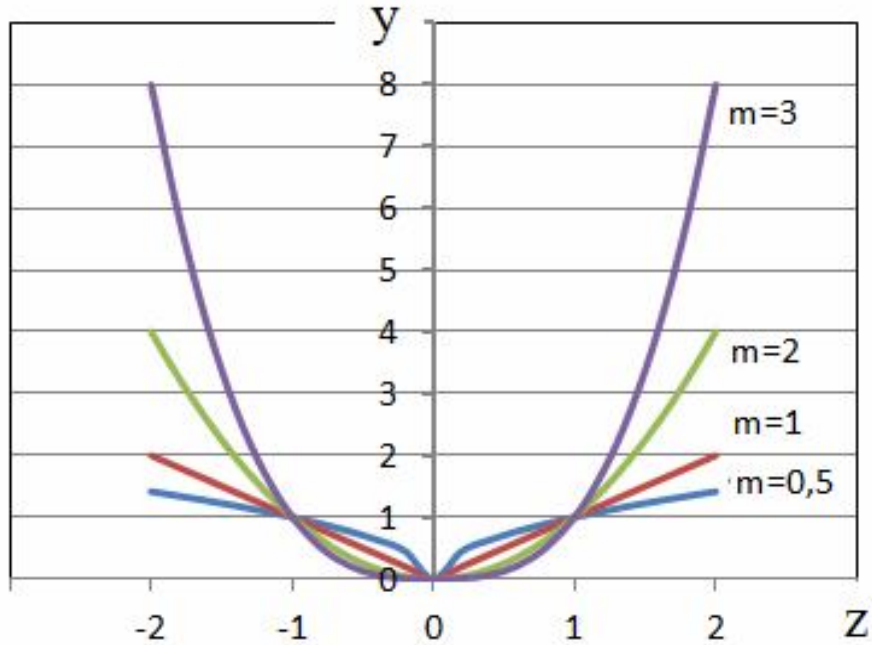


Рисунок 4 – Поперечное сечение канала при разных значениях  $m$

Снова переходя в систему координат, движущуюся с ускорением (15) и, представляя скорость в виде (16), систему уравнений (27) представим в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial X} + \frac{m}{m+1} h \frac{\partial v}{\partial X} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial X} + g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial X} = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Если независимую переменную представить в виде (18), то уравнения (28) трансформируются в

$$\begin{cases} (v - \varepsilon_1) \frac{dh}{d\varepsilon_1} + \frac{m}{m+1} h \frac{dv}{d\varepsilon_1} = 0, \\ g \cos \theta \frac{dh}{d\varepsilon_1} + (v - \varepsilon_1) \frac{dv}{d\varepsilon_1} = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Скорость и высоту потока определим из (29)

$$v - \varepsilon_1 = -g \cos \theta (dh / dv), \quad (30)$$

$$h = g \cos \theta (m+1) / m (dh / dv)^2. \quad (31)$$

Преобразование уравнений (30) и (31) дает нам зависимость высоты потока от его скорости:

$$h = ((m+1)/m)(1/(g \cos \theta))(v - \varepsilon_1)^2. \quad (32)$$

Продифференцировав (32), получим уравнение для скорости потока:

$$dv / d\varepsilon_1 = (2m+2)/(3m+2).$$

Интегрирование данного выражения дает следующую зависимость для скорости:

$$v = (2m+2)/(3m+2)\varepsilon_1 + d_2, \quad (33)$$

где  $d_2$  – постоянная интегрирования.

После подстановки выражения (33) в (32) найдем высоту потока:

$$h = ((m+1)/(mg \cos \theta))(d_2 - m/(3m+2)\varepsilon_1)^2. \quad (34)$$

Переходя в декартовую систему координат  $(x, t)$ , получим выражение для определения скорости и высоты потока для данной задачи:

$$u = \frac{2m+2}{3m+2} \frac{x}{t} + \frac{2m+1}{3m+2} g \alpha t + d_2, \quad (35)$$



$$h = \frac{m+1}{mg \cos \theta} \left( d_2 - \frac{m}{3m+2} \left( \frac{x}{t} - \frac{g\alpha t}{2} \right) \right)^2. \quad (36)$$

Из (33) и (34) можно определить характеристики дифференциальных уравнений и постоянные интегрирования:

$$\varepsilon_1 = v \pm c_2. \quad (37)$$

$$d_2 = \frac{m}{3m+2} \left( v \mp 2 \frac{m+1}{m} c_2 \right) = \frac{m}{3m+2} I_{2\pm}, \quad (38)$$

где  $I_{2\pm} = v \mp 2 \sqrt{\frac{m+1}{m} g \cos \theta h}$  – инварианты Римана,  $c_2 = \sqrt{\frac{m}{m+1} g \cos \theta h}$ .

В момент времени  $t = 0$  удовлетворяются начальные условия  $h(x, 0) = h_0(x)$  и  $u(x, 0) = 0$ . Следовательно, и скорость относительного движения  $v(X, 0) = 0$ . Как и ранее, для области  $X < 0$  начальные данные при  $t = 0$  имеют вид  $v(X, 0) = 0$ ,  $c = c_{02}$ .

Приняв во внимание начальные условия  $v(X, 0) = 0$  и  $h(X, 0) = h_0$  из (38) получим:

$$d_2 = \mp (2m+2)/(3m+2)c_{02}$$

где  $c_{02} = \sqrt{(m/(m+1))g \cos \theta h_0}$ .

В этом случае, как и ранее, в относительном движении при  $X = -c_{02}t$ , относительная скорость  $v = 0$ . Тогда постоянная интегрирования будет равна:

$$d_2 = (2m+2)/(3m+2)c_{02}.$$

Таким образом, после этих вычислений мы можем записать выражения для определения скорости и мощности потока в наклонных каналах:

$$u = \frac{2m+2}{3m+2} \left( \frac{x}{t} + c_{02} \right) + \frac{2m+1}{3m+2} g\alpha t,$$

$$h = \frac{m+1}{(3m+2)^2 mg \cos \theta} \left( 2(m+1)c_{02} - m \left( \frac{x}{t} - \frac{g\alpha t}{2} \right) \right)^2.$$

Фронт нулевой толщины имеет координату  $x_R = 2(m+1)c_{01}t/m + g\alpha t^2/2$ , а левый фронт – первоначальную толщину  $h_0 - x_L = g\alpha t^2/2 - c_{01}t$ .

В дальнейшем в расчетах берем  $h_0 = 1$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $\varphi = 10^\circ$ .

На рисунке 5 показано изменение скорости потока на переднем фронте при  $t = 1$  сек. и волновой скорости  $c_{02}$ . С увеличением коэффициента  $m$  скорость на переднем фронте потока стабилизируется и стремится к значению скорости, соответствующего случаю, когда дно потока ровное.

При  $m \rightarrow \infty$  поперечное сечение канала стремится к прямоугольному (рис. 6).

Если мы найдем предел скорости потока при  $m \rightarrow \infty$  в канале с параболическим сечением, то получим скорость потока движущегося над ровным дном, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2m+2}{3m+2} \left( \frac{x}{t} + c_{02} \right) + \frac{2m+1}{3m+2} g\alpha t \right] = \frac{2}{3} \left( \frac{x}{t} + c_{01} + g\alpha t \right).$$

Отсюда легко можно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{02} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{m}{m+1} g \cos \theta h_0} = \sqrt{g \cos \theta h_0} = c_{01}.$$

Также можно показать, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m+1}{(3m+2)^2 mg \cos \theta} \left( 2(m+1)c_{02} - m \left( \frac{x}{t} - \frac{g\alpha t}{2} \right) \right)^2 = \frac{1}{9g \cos \theta} \left( 2c_{01} - \frac{x}{t} + \frac{g\alpha t}{2} \right)^2.$$

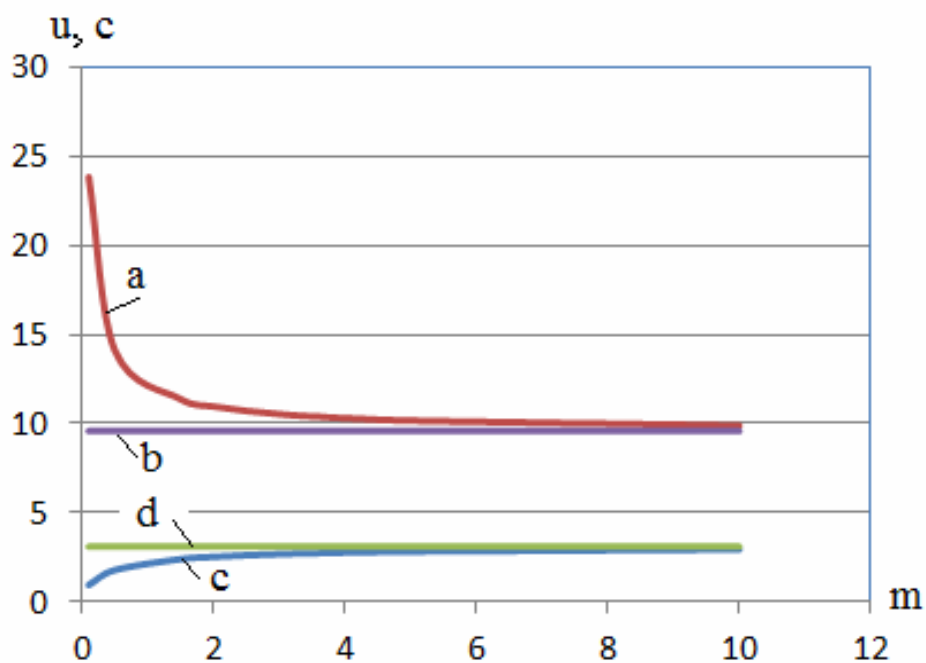


Рисунок 5 – Изменение скорости потока на переднем фронте и волновой скорости: а – скорость потока на переднем фронте при разных значениях  $m$ , б – скорость потока на переднем фронте, когда основание ровное, с – волновая скорость ( $c_{02}$ ) при разных значениях  $m$ , д – волновая скорость ( $c_{01}$ ), когда основание ровное

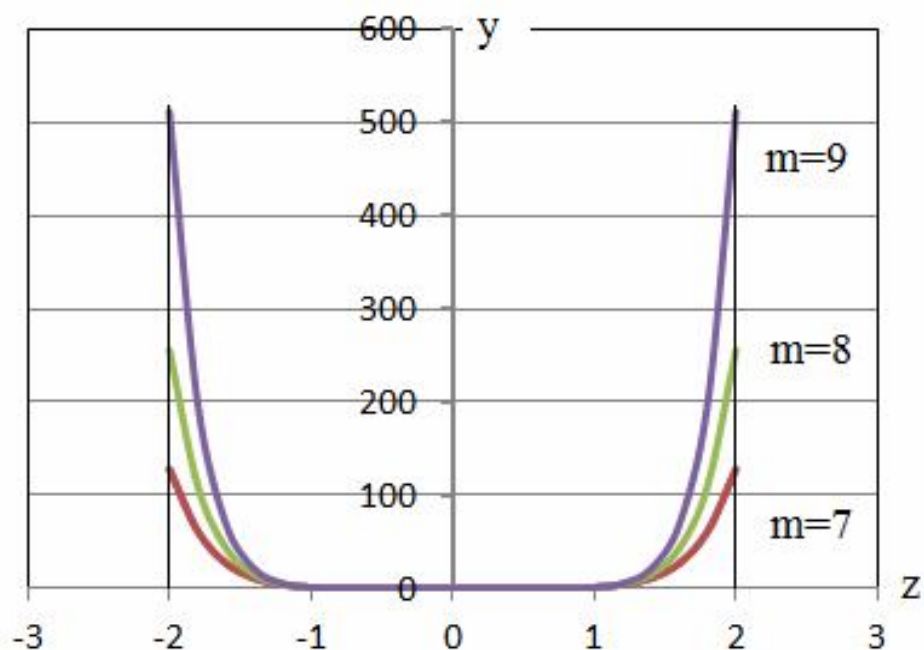
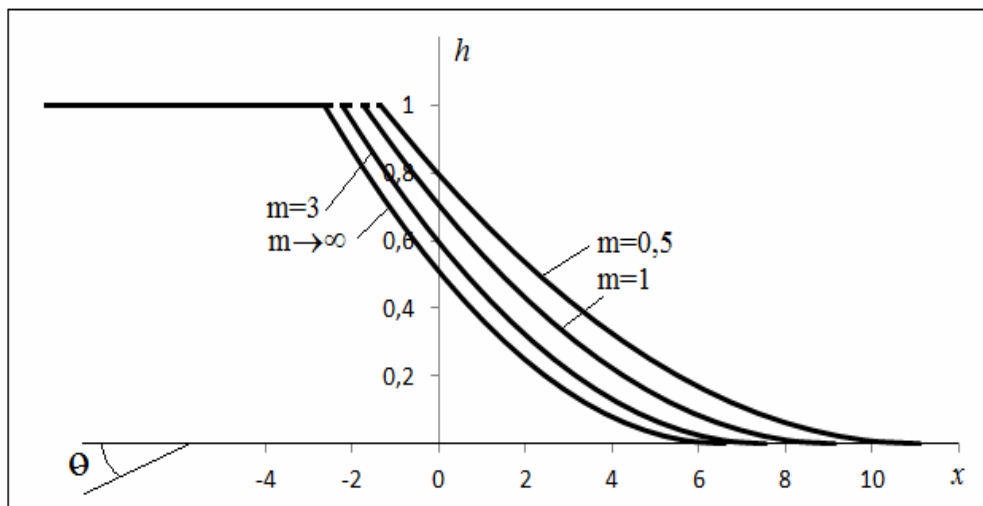
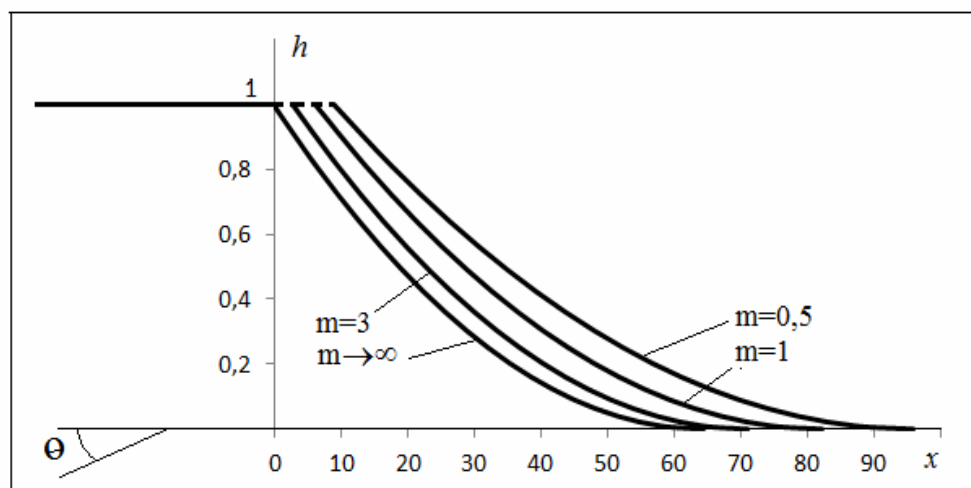


Рисунок 6 – Влияние  $m$  на форму поперечного сечения канала

Графики изменения высоты потока при разных значениях  $m$  и  $t$  представлены на рисунках 7 и 8.

Анализ полученных выше решений показывает, что уравнения мелкой воды, при течении потока над ровным дном (в горизонтальных и наклонных каналах) с учетом трения на дне или без трения, позволяют получить скорость потока, которая описывается линейным уравнением, а высота потока при этом описывается квадратичным уравнением.

Рисунок 7 – Изменение высоты потока при разных значениях  $m$  ( $t = 1с$ )Рисунок 8 – Изменение высоты потока при разных значениях  $m$  ( $t = 7с$ )

**Анализ некоторых возможных направлений автоматизации расчетов по описанным формулам (методикам).** Использование описанных выше расчетных соотношений (формул) может быть автоматизировано с применением программ для ЭВМ. Это не только снизит трудоемкость вычислений, но и в случае применения набора готовых расчетных схем (представленных в наглядной графической форме) уменьшит риск неправильного использования формул, позволит автоматически осуществлять проверку вводимых исходных данных на взаимную непротиворечивость, их соответствие допустимым диапазонам значений и пр.

В простейшем варианте для проведения расчетов могут быть применены электронные таблицы. При этом ячейки рабочего листа электронной таблицы могут быть использованы для размещения входных и выходных (результатирующих) данных, размещения расчетных схем задач. Кроме того средства построения графиков (они в современных электронных таблицах достаточно мощные) могут быть использованы для показа результатов расчетов в наглядной форме. Это могут быть, например, зависимости решений от пространственных координат задач и времени.

С определенными ограничениями на рабочих листах могут быть размещены и «базы данных» по характеристикам грунтов и пр. – в качестве справочной информации.

Применение «макросов» (на языке VBA) даст дополнительные возможности диалога описываемых программных средств с пользователем, в т.ч. в отношении выбора расчетных схем задач, проведения автоматической проверки исходных данных на непротиворечивость и пр.

В случае систематического использования описанных в статье расчетных методик могут быть подготовлены более сложные программные средства с развитыми функциональными возможностями,

в т.ч. и не использующие возможности электронных таблиц. Такие программные средства могут применяться путем инсталляции их на ПЭВМ пользователей или на сервера локальных сетей, а также по технологии SaaS (в дистанционном режиме).

Кроме того, расчетные соотношения, описанные выше, могут быть использованы и в виде некоторых дополнительных модулей для «прикладных» расчетов в программах имитационного компьютерного моделирования или в моделях, построенных на базе существующих пакетов имитационного моделирования процессов в сплошных средах.

#### Список литературы

1. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика (теория и приложения к геофизической гидродинамике) / Г. И. Баренблатт. – 2-е изд. – Ленинград : Гидрометеиздат, 1982. – 256 с.
2. Богомолов С. В. Математическое моделирование движения оползня-потока методом частиц / С. В. Богомолов, Е. В. Захаров, С. В. Зеркаль // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики (МДОЗМФ-2001) : труды X Международного симпозиума. – Херсон, 2001. – С. 69–71.
3. Григорян С. С., Нилов Н. Н., Остроумов А. В., Федоренко В. С. Математическое моделирование горных обвалов и оползней больших объемов / С. С. Григорян, Н. Н. Нилов, А. В. Остроумов, В. С. Федоренко // Инженерная геология. – 1983. – № 6. – С. 61–73.
4. Дуйшеналиев Т. Б. Моделирование движения грунтовых потоков на наклонных поверхностях / Т. Б. Дуйшеналиев, Б. Т. Мекенбаев, С. Б. Барсанаев, А. Ш. Сарбалиев // Известия Сарбалиев КГТУ имени И. Раззакова. – 2009. – № 17. – С. 374–376.
5. Николкина И. Ф. Нелинейная динамика гравитационных потоков в наклоненных каналах / И. Ф. Николкина, Е. Н. Пелиновский, Т. Г. Талипова // Доклады академии наук. – 2010. – Т. 432, № 5. – С. 689–692.
6. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики / Л. В. Овсянников. – Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. – 336 с.
7. Петрухин Н. С. Римановы волны в динамике оползней над плоским откосом / Н. С. Петрухин, Е. Н. Пелиновский // Современные проблемы науки и образования. – 2011. – № 6.
8. Рыскин Н. М. Нелинейные волны : учеб. пособие для вузов / Н. М. Рыскин, Д. И. Трубецков. – Москва : Наука. Физматлит, 2000 – 272 с.
9. Тарасевич Ю. Ю. Нахождение и визуализация автомодельных решений дифференциальных уравнений в частных производных средствами Maple : методические рекомендации / Ю. Ю. Тарасевич. – Астрахань, 2010. – 23 с.
10. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина : пер. с англ. / К. Флетчер. – Москва : Мир, 1988. – 352 с.
11. Эглит М. Э. Неуставившиеся движения в руслах и на склонах / М. Э. Эглит. – Москва : МГУ, 1986–96 с.
12. Chen H. Numerical simulation of debris flows / H. Chen, C. F. Lee // Canadian Geotechnical Journal. – 2000. – Vol. 37, № 1. – P. 146–160.
13. Mungkasi S. A new analytical solution for testing debris avalanche numerical models / S. Mungkasi, Stephen G. Roberts // ANZIAM J. 52 (CTAC2010). – 2011. – P. C349–C363.
14. Mangeney A. Analytical Solution for Testing Debris Avalanche Numerical Models / A. Mangeney, P. Heinrich, R. Roche // PAGEOPH. – 2000. – Vol. 157. – P. 1081–1096.
15. Zahibo N. The Savage-Hutter model for theavalanche dynamics in inclined channels: analytical solutions / N. Zahibo, E. Pelinovsky, T. Talipova, I. Nikolkina // J. Geophys. Res. – 2010. –Vol. 115.

#### References

1. Barenblatt G. I. *Podobie, avtomodelnost, promejutochnaya asimptotika (teoriya i prilozheniya k geofizicheskoj gidrodinamike)* [Self-similarity, intermediate asymptotics (theory and applications to geophysical hydrodynamics)]. 2 ed. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1982, pp. 256.
2. Bogomolov C. V., Zaharov E. V., Zerkal S. V. Matematicheskoe modelirovanie dvizheniya opolznja-potoka metodom chastits [Mathematical modeling of movement of landslide-flow by particles]. *Metody diskretnyh osobennostei v zadachah matematicheskoi fiziki : trudy X Mezhdunarodnogo simpoziuma (MDOZMF-2001)* [Methods of discrete features in mathematical physics. Proceedings of the X International symposium (MDOZMF-2001)], Herson, 2001. Pp. 69–71.
3. Grigoryan S. S., Nilov N. N., Ostroumov A. V., Fedorov V. S. Matematicheskoe modelirovanie gorny hobvalov i opolznei bolshikh obyemov [Mathematical modeling of rock falls and landslides of large volumes]. *Inzhenernaya geologiya* [Engineering geology], 1983, no. 6, pp. 61–73.
4. Duishenaliev T. B., Mekenbaev B. T., Barsanaev S. B., Sarbaliev A. Sh. Modelirovanie dvizheniya gruntovyh potokov na naklonnyh poverhnostyah [Modeling of ground water flows on inclined surfaces]. *Izvestiya KGTU im. I. Razzakova* [Proceedings of the KGTU after I. Razzakov], Bishkek. 2009, no. 17, pp. 374–376.
5. Nikolkina I. F., Pelinovskiy E. N., Talipova T. G. Nelineinaya dinamika gravitacionnykh potokov v naklonennykh kanalakh [Nonlinear dynamics of gravitational flow in inclined channels]. *Doklady akademii nauk* [Proceedings of the Academy of Science], 2010, vol. 432, no. 5, pp. 689–692.
6. Ovsyannikov L. V. *Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki* [Lectures on the basics of gas dynamics], Moscow – Izhevsk, Institute of Computer Science Publ. House, 2003. pp. 336.
7. Petruhin N. S., Pelinovskiy E. N. Rimanovy volny v dinamike opolznei nad ploskim otkosom [Riemann waves in dynamics of landslides on a flat slope]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya* [Modern problems of science and education], 2011, no. 6.
8. Ryskin N. M., Trubeckov D. I. *Nelineinye volny* [Nonlinear waves], Moscow, Nauka. Fizmatlit Publ., 2000. pp. 272.
9. Tarasevich U. U. Nahojdenie i vizualizaciya avtomodelnykh resheniy differencialnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh sredstvami Maple. [Finding and visualization of self-similar solutions of differential equations in partial derivatives by Maple tools]. *Metodicheskie rekomendatsii* [Methodological manual], Astrakhan, 2010, pp. 23.

10. Fletcher K. *Chislennyye metody na osnove metoda Galerkina* [Numerical methods based on Galerkin method]: perevod s angl., Moscow, Mir Publ., 1988. pp. 352.

11. Eglit M. E. *Neustanovivshiesya dvizheniya v ruslah i na sklonah* [Unsteady motion in channels and on slopes]. Moscow, MGU Publ. House, 1986, pp. 96.

12. Chen H., Lee C.F. Numerical simulation of debris flows. *Canadian Geotechnical Journal*, 2000, vol. 37, no. 1, pp. 146–160.

13. Mungkasi S., Stephen G. Roberts. A new analytical solution for testing debris avalanche numerical models. *ANZIAM J. 52 (CTAC2010)*, 2011, pp. C349–C363.

14. Manganey A., Heinrich P., Roche R. Analytical Solution for Testing Debris Avalanche Numerical Models. *PA-GEOPH*, 2000, vol. 157. pp. 1081–1096.

15. Zahibo N., Pelinovsky E., Talipova T., Nikolkina I. The Savage-Hutter model for the avalanche dynamics in inclined channels: analytical solutions. *J. Geophys. Res*, 2010, vol. 115.

УДК 519.688+681.3

## МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОВЫХ ТРУБ<sup>1</sup>

Статья поступила в редакцию 19.07.2016, в окончательном варианте – 27.07.2016.

**Семенов Александр Николаевич**, аспирант, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 101000, Российская Федерация, г. Москва, ул. Мясницкая, 20, e-mail: tanmaniak@mail.ru

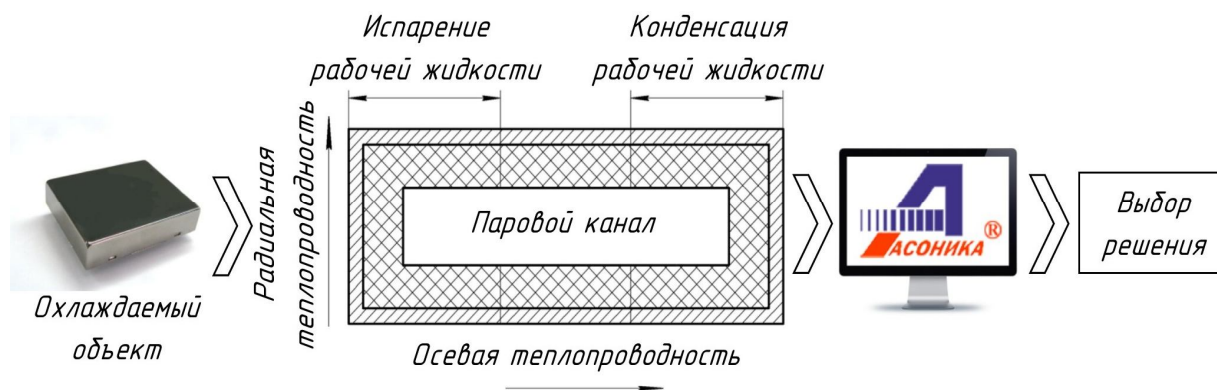
**Максимкин Александр Игоревич**, аспирант, Национальный исследовательский ядерный университет «Московский инженерно-физический институт», 115409, Российская Федерация, г. Москва, Каширское ш., 31, e-mail: avian4uk@gmail.com

**Увайсов Сайгид Увайсович**, доктор технических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 101000, Российская Федерация, г. Москва, ул. Мясницкая, 20, e-mail: uvaysov@yandex.ru

Современная радиоэлектронная аппаратура (РЭА) выполняет всё большее количество функций, а ее аппаратно-технические решения становятся все сложнее. Одновременно возрастает и энергопотребление РЭА, что может ухудшать её тепловой режим и надежность эксплуатации, уменьшать сроки службы. Поэтому перед разработчиками РЭА стоит актуальная задача по снижению температуры работающей РЭА при помощи различных систем охлаждения. Существуют воздушные и жидкостные системы охлаждения РЭА. В их конструкциях используются радиаторы, тепловые трубы (ТТ), элементы Пельтье. В данной статье обоснована целесообразность использования ТТ при проектировании РЭА, особенно предназначенной для использования в качестве бортовой аппаратуры. Рассмотрены конструкции ТТ, принципы их работы, критерии выбора теплоносителей, материалов фитилей и корпусов. Кроме того, в статье представлена модель тепловых процессов ТТ и описаны системы охлаждения, использующие тепловые трубы. На основе проведенного исследования описан метод построения моделей тепловых процессов РЭА при наличии ТТ с использованием средства моделирования АСОНИКА-Т. Приведен пример использования предлагаемого метода для моделирования конкретной конструкции РЭА. Сделаны выводы по итогам проделанной работы.

**Ключевые слова:** тепловая труба, фитиль, рабочая жидкость, АСОНИКА, АСОНИКА-Т, модель тепловых процессов, радиоэлектронная аппаратура, тепловой режим, проектирование, системы охлаждения

### Графическая аннотация (Graphical annotation)



<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-07-00422 «Информационно-измерительная система численного моделирования и мониторинга температурных полей электронных средств»).