DOI 10.21672/2074-1707.2021.55.3.082-089
УДК 519.711.3, 556.3

МЕТОДЫ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Статья поступила в редакцию 09.06.2021, в окончательном варианте – 21.07.2021.

Калиберда Игорь Владимирович, Северо-Кавказский федеральный университет, Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г. Пятигорске, 357500, Российская Федерация, г. Пятигорск, пр. 40 лет Октября, 56,
заведующий лабораторией, e-mail: kaliberda.igor@ya.ru

Рассматривается важная задача выбора метода синтеза регуляторов для построения системы управления параметрами гидролитосферных процессов. В статье рассмотрены вопросы системного анализа и синтеза систем управления с распределенными параметрами. Показаны существующие на сегодняшний день пути решения математических уравнений, описывающие модели с пространственными координатами. Выделены основные методы, когда существует решения математической модели: аналитическое конструирование оптимальных регуляторов и структурный метод анализа. Описаны методы аппроксимации в случаях, когда не существует решения математической модели: методы конечномерной аппроксимации; декомпозиции билинейных систем управления; частотный метод. Приведены основные положения методов при решении задачи дискретизации в частных производных. Показано предпочтение частотного метода синтеза регуляторов в создании систем управления гидролитосферных процессов. Получен годограф в виде логарифмических амплитудной и фазовой частотных поверхностей, который можно использовать интерпретации критерия устойчивости Найквиста по графикам. Рассмотрен частотный метод синтеза многомерных систем, когда входные воздействия в распределенный регулятор реализуются в виде дискретной функции по пространству. Показано условие, при котором объект принадлежит к классу пространственно-инвариантных. Сделан вывод, что частотный метод синтеза регуляторов представляется наиболее удобным инструментом при создании гидродинамических систем с распределенными параметрами.

Ключевые слова: метод синтеза регуляторов, система управления с распределенными параметрами, гидролитосферные процессы

METHODS OF SYNTHESIS OF REGULATORS FOR HYDRODYNAMIC CONTROL SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

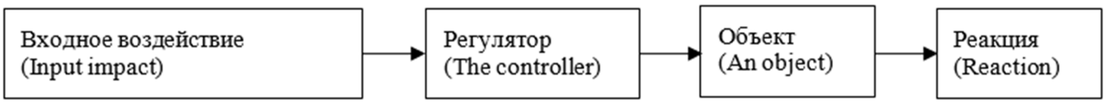
The article was received by the editorial board on 09.06.2021, in the final version – 21.07.2021.

Kaliberda Igor V., North Caucasus Federal University, Institute of Service, Tourism and Design (branch) of NCFU in Pyatigorsk, 56 40 let Oktyabrya Ave., Pyatigorsk, 357500, Russian Federation,
Head of the laboratory, e-mail: kaliberda.igor@ya.ru.

An important problem of choosing a method for synthesizing regulators for constructing a system for controlling the parameters of hydrolithospheric processes is considered. The article deals with the issues of system analysis and synthesis of control systems with distributed parameters. The existing ways of solving mathematical equations describing models with spatial coordinates are shown. The main methods when there are solutions to the mathematical model are identified: analytical construction of optimal regulators and the structural method of analysis. Methods of approximation in cases where there is no solution to the mathematical model are described: methods of finite-dimensional approximation; decomposition of bilinear control systems; frequency method. The main provisions of the methods for solving the problem of discretization in partial derivatives are given. The preference of the frequency method of regulator synthesis in the creation of control systems for hydrolithospheric processes is shown. A hodograph is obtained in the form of logarithmic amplitude and phase frequency surfaces, which can be used to interpret the Nyquist stability criterion from graphs. A frequency method for the synthesis of multidimensional systems is considered, when the input effects to a distributed controller are implemented as a discrete function in space. The condition under which the object belongs to the class of spatially invariant objects is shown. It is concluded that the frequency method of regulator synthesis is the most convenient tool for creating systems with distributed parameters.

Keywords: method of regulator synthesis, control system with distributed parameters, hydrolithospheric processes

Графическая аннотация (Graphical annotation)



Введение. Процессы, происходящие в реальной среде, содержат как временную составляющую, так и координаты трехмерного пространства. Математические уравнения, описывающие модели рассматриваемых изменений, выражаются, как правило, с использованием частных производных. Системный анализ таких изменений в связи с этим сильно усложняется.

Обзор методов. Можно пойти по пути исследования распределенных процессов, предположив, что существует аналитическое решение математической задачи. Тогда решение будет содержать бесконечный спектр собственных вектор-функций, а практическая реализация таких изменений в системе с распределенными параметрами (СРП) потребует использования методов дискретизации. Для СРП данное направление получило развитие в таких методах, как:

- АКОР – аналитическое конструирование оптимальных регуляторов;
- СМА – структурный метод анализа.

АКОР, базирующееся на принципах оптимальности Беллмана и максимума Понтрягина, является понятийным аппаратом направления под руководством В.А. Ковалева. Метод АКОР для СРП подробно освящен в работах таких авторов, как Э.Я. Рапопорт [6], И.П. Ультриванов, В.П. Хацкевич [7] и др. В частном случае, для гидродинамических процессов, решение задачи синтеза представлено в работах В.А. Олейникова и Е.Г. Павлова. Необходимо отметить, что данному метод присущи некоторые проблемы, связанные с оптимальным управлением. Это вызвано рядом трудностей решения уравнений Риккати. Если решение дифференциального уравнения (ДУ) получено, то не понятно, как аппроксимировать бесконечную систему уравнений. Также сложно выбрать весовые коэффициенты функций оптимизации и пронаблюдать изменения.

СМА СРП описывает направление работ А.Г. Бутковского, Л.М. Пустыльникова и Ю.В. Дарнинского [8], раскрывающее теорию подвижного управления.

В случае, когда не существует решения математической модели, применяются методы аппроксимации, которые описывают действие объекта по выбранным пространственным модам. По сути предлагается дискретный аналог математической модели, который в свою очередь обладает численным решением. Наиболее известные методы данного направления:

- МКА – методы конечномерной аппроксимации;
- ДБСУ – декомпозиции билинейных систем управления;
- ЧМ – частотный метод.

МКА в литературе подробно рассмотрены, например, такими авторами, как К.Г. Валеев и О.А. Жаутыков. В частности, для бесконечных систем ДУ даны теоремы существования решений и, причем их единственности.

Развивая теорию управления и идентификации относительно билинейных динамических систем, Ю. И. Самойленко [9] разработал теоретико-групповые методы оптимизации и ДБСУ. Информационная энтропия протонной подсистемы была рассмотрена как носитель дискретной информации в описываемых молекулярных сенсорах и вычислительных устройствах, что и стало основой метода управления расположением протонов в водородных связях.

ЧМ разработан И.М. Першиным и подробно изложен в работах [1–4]. ЧМ используется в СРП, когда для получения динамических характеристик объектов при выбранном числе пространственных мод определяются на основе экспериментальных данных. ЧМ СРП включает следующие составные части:

1. Методика анализа.
2. Определение частотных критерий устойчивости.
3. Аппроксимация характеристик объектов с учетом набора сосредоточенных звеньев.
4. Формирование структуры регулятора.
5. Методика синтеза для СРП.

Особое внимание уделяется переходу от бесконечно мерного фазового пространства к конечномерному. Если на данном этапе не учесть существенных свойств распределенного объекта, то в итоге возможно получить описание совсем другого процесса.

Предлагаемый метод. Рассмотрим математическую модель месторождения минеральных вод, состоящую из четырех добывающих и контролирующих скважин и четырех водоносных пластов. Схема расположения скважин представлена на рисунке 1. Процесс взаимосвязей между пластами может быть записан в виде системы уравнений:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial h_1(x,y,z,\tau)}{\partial \tau} = k_{1,x}\dfrac{\partial^2 h_1(x,y,z,\tau)}{\partial x^2} + k_{1,y}\dfrac{\partial^2 h_1(x,y,z,\tau)}{\partial y^2} + k_{1,z}\dfrac{\partial^2 h_1(x,y,z,\tau)}{\partial {z_1}^2};\\
\dfrac{\partial H_2(x,y,z,\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\eta_2}\left(k_{2,x}\dfrac{\partial^2 H_2(x,y,z,\tau)}{\partial x^2} + k_{2,y}\dfrac{\partial^2 H_2(x,y,z,\tau)}{\partial y^2} + k_{2,z}\dfrac{\partial^2 H_2(x,y,z,\tau)}{\partial {z_2}^2}\right);\\
\dfrac{\partial H_3(x,y,z,\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\eta_3}\left(k_{3,x}\dfrac{\partial^2 H_3(x,y,z,\tau)}{\partial x^2} + k_{3,y}\dfrac{\partial^2 H_3(x,y,z,\tau)}{\partial y^2} + k_{3,z}\dfrac{\partial^2 H_3(x,y,z,\tau)}{\partial {z_3}^2}\right);\\
\dfrac{\partial H_4(x,y,z,\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\eta_4}\left(k_{4,x}\dfrac{\partial^2 H_4(x,y,z,\tau)}{\partial x^2} + k_{4,y}\dfrac{\partial^2 H_4(x,y,z,\tau)}{\partial y^2} + k_{4,z}\dfrac{\partial^2 H_4(x,y,z,\tau)}{\partial {z_4}^2}\right) -\\
+V\cdot\delta(x_{0,j}, y_{0,j}, z_{0,j})\\
0 < x < L_x;\ 0 < y < L_y;\ 0 < z < L_{z_4}
\end{cases} \tag{1}$$

где h_1 – напор в горизонте грунтовых вод;

H_i – напор в изучаемом i-м водоносном горизонте (i = 2…4);

$k_{i,x}$, $k_{i,y}$, $k_{i,z}$ – коэффициенты фильтрации по пространственным координатам в горизонте грунтовых вод (i = 1) и i-го пласта (i = 2…4);

η_i – упругоемкость i-го пласта (i = 2...4);

$V = Q{\cdot}K_ф$ – понижение напора, вызванное воздействием добывающей скважиной (Q – дебит добывающей скважины, $К_ф$ – заданный коэффициент);

$\delta(x_{0,j}, y_{0,j}, z)$ – функция, равная единице, *если* $x=x_{0,j}$, $y=y_{0,j}$, $z_1 \le z \le z_2$, и равная нулю в других случаях;

x, y, z – пространственные координаты;

τ – время.

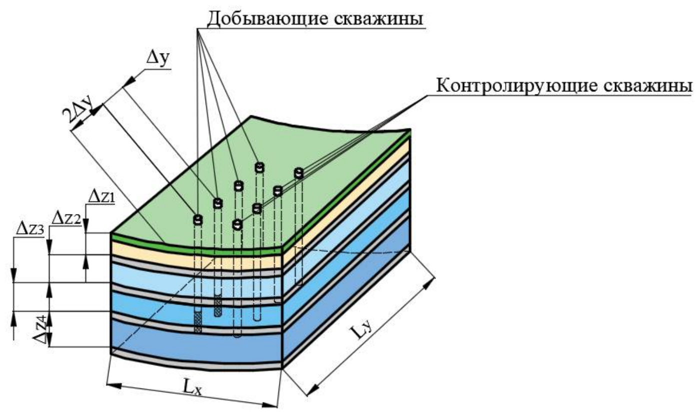


Рисунок 1 – Схема месторождения

Граничные условия горизонта грунтовых вод и вторым пластом записываются в следующем виде:

$$h_1\left(x,y,L_{z_1},\tau\right) = h_1\left(x,y,L_{z_1},\tau\right) + b_1\cdot\left(H_2\left(x,y,0,\tau\right) - h_1\left(x,y,L_{z_1},\tau\right)\right), \tag{2}$$

$$H_2\left(x,y,0,\tau\right) = H_2\left(x,y,0,\tau\right) - b_1\cdot\left(H_2\left(x,y,0,\tau\right) - h_1\left(x,y,L_{z_1},\tau\right)\right). \tag{3}$$

Граничные условия между вторым и третьим пластом записываются в следующем виде:

$$H_2\left(x,y,L_{z_3},\tau\right) = H_2\left(x,y,L_{z_3},\tau\right) + b_2\cdot\left(H_3\left(x,y,0,\tau\right) - H_2\left(x,y,L_{z_3},\tau\right)\right), \tag{4}$$

$$H_3\left(x,y,L_{z_3},\tau\right)=H_3\left(x,y,L_{z_3},\tau\right)+b_2\cdot\left(H_3\left(x,y,0,\tau\right)-H_2\left(x,y,L_{z_3},\tau\right)\right). \quad (5)$$

Граничные условия между третьим и четвертым пластами записываются в следующем виде:

$$H_3\left(x,y,L_{z_3},\tau\right)=H_3\left(x,y,L_{z_3},\tau\right)+b_3\cdot\left(H_4\left(x,y,0,\tau\right)-H_3\left(x,y,L_{z_3},\tau\right)\right), \quad (6)$$

$$H_4\left(x,y,L_{z_3},\tau\right)=H_4\left(x,y,L_{z_3},\tau\right)+b_3\cdot\left(H_4\left(x,y,0,\tau\right)-H_3\left(x,y,L_{z_3},\tau\right)\right). \quad (7)$$

Для нижней границы четвертого пласта условие будет иметь вид:

$$\partial H_4\left(x,y,L_{z_4},\tau\right)/\partial z=0. \quad (8)$$

Граничные условия по бокам моделируемой области будут иметь вид:

$$h_1\left(0,y,z,\tau\right)=h_{1,0};H_2\left(0,y,z,\tau\right)=H_{2,0},$$

$$H_3\left(0,y,z,\tau\right)=H_{3,0};H_4\left(0,y,z,\tau\right)=H_{4,0}, \quad (9)$$

$$\partial h_1\left(L_x,y,z,\tau\right)/\partial x=0;\ \partial H_2\left(L_x,y,z,\tau\right)/\partial x=0,$$

$$\partial H_3\left(L_x,y,z,\tau\right)/\partial x=0;\ \partial H_4\left(L_x,y,z,\tau\right)/\partial x=0, \quad (10)$$

где $h_{1,0}$, $H_{2,0}$, $H_{3,0}$, $H_{4,0}$ – начальные состояния грунтовых вод пластов.

Для определения динамических характеристик необходима дискретная модель объекта. Для грунтовых вод модель будет иметь вид:

$$\frac{\Delta h_{1,\eta,\gamma,\xi}}{\Delta\tau}=k_{1,x}\frac{h_{1,\eta-1,\gamma,\xi}-2\cdot h_{1,\eta,\gamma,\xi}+h_{1,\eta+1,\gamma,\xi}}{(\Delta x)^2}+$$

$$+k_{1,y}\frac{h_{1,\eta,\gamma-1,\xi}-2\cdot h_{1,\eta,\gamma,\xi}+h_{1,\eta,\gamma+1,\xi}}{(\Delta y)^2}+$$

$$+k_{1,z}\frac{h_{1,\eta,\gamma,\xi-1}-2\cdot h_{1,\eta,\gamma,\xi}+h_{1,\eta,\gamma,\xi+1}}{(\Delta z_1)^2}; \quad (11)$$

$$2<\eta<N_x-1;2<\gamma<N_y-1;2<\xi<N_{z1}-1,$$

где N_x, N_y – число точек дискретизации по координатам x и y соответственно; N_{zi} – число точек дискретизации i-го пласта по координате z (i=1...4); η, γ, ξ– пространственные координаты.

Для пластов со второго по четвертый модель будет иметь аналогичный вид.

Входным воздействием на объект управления служит дебит добывающей скважины $Q(\tau)$.

В работах [1–3] достаточно подробно описаны передаточные функции (ПФ) распределенных звеньев. Реакция объекта по выбранной моде (η,γ) входного воздействия будет представлена в виде:

$$W_{0,\eta,\gamma}(s)=\frac{\exp\left(\beta_{\eta,\gamma}\cdot\overset{*}{z}\right)+\exp\left(-\beta_{\eta,\gamma}\cdot\overset{*}{z}\right)}{\lambda\cdot\beta_{\eta,\gamma}\cdot(\exp\left(\beta_{\eta,\gamma}\cdot z_L\right)-\exp\left(-\beta_{\eta,\gamma}\cdot z_L\right))},\ \left(\eta,\gamma=\overline{1,\infty}\right), \quad (12)$$

где

$$\beta_{\eta,\gamma}=\left(\frac{s}{a}+\psi_\eta^2+\widetilde{\varphi}_\gamma^2\right)^{1/2};$$

s – оператор Лапласа;

$a,\overset{*}{z},z_L$ – заданные числа;

ψ_η, $\widetilde{\varphi}_\gamma$ – пространственные частоты; $\left(\eta,\gamma=\overline{1,\infty}\right)$.

Теперь объект с СРП можно описать в виде ПФ полученного образца (1), а каждая ПФ – отношением бесконечных полиномов.

Представим в (12) $s = j\omega$ и получим комплексный передаточный коэффициент (КПК) СРП по пространственным модам:

$$W_{0,\eta,\gamma}(j\omega)=\frac{\exp\left(\beta_{\eta,\gamma}\cdot\overset{*}{z}\right)+\exp\left(-\beta_{\eta,\gamma}\cdot\overset{*}{z}\right)}{\lambda\cdot\beta_{\eta,\gamma}\cdot(\exp\left(\beta_{\eta,\gamma}\cdot z_L\right)-\exp\left(-\beta_{\eta,\gamma}\cdot z_L\right))},\ \left(\eta,\gamma=\overline{1,\infty}\right) \tag{13}$$

где

$$\beta_{\eta,\gamma}=\left(\frac{j\omega}{a}+\psi_\eta^2+\tilde{\phi}_\gamma^2\right)^{1/2};$$

СРП, у которой КПК можно описать выражением, относится к классу пространственно-инвариантных. Из этого следует, что решение при квазистационном воздействии распадается по собственным вектор-функциям оператора объекта. Данные вектор-функции можно представить в виде комбинации sin(.)&cos(.). Теперь данный объект можно представить в виде совокупности независимых блоков с комплексными передаточными коэффициентами вида (2). Отсюда следует, что пространственная мода, при прохождении через объект управления, изменяет только амплитуду.

Если изменять в (13) ω от 0 до ∞, то получим бесконечный спектр частотных характеристик СРП, представленный на рисунке 1а.

Введем дискретную функцию (ДФ) $G_{\eta,\gamma}$ и обозначим ее через выражение:

$$G_{\eta,\gamma}=\psi_\eta^2+\tilde{\phi}_\gamma^2,\ \left(\eta,\gamma=\overline{1,\infty}\right) \tag{14}$$

Данная функция изменяется в пределах $G_н=G_{1.1}\le G_{\eta,\gamma}\le\infty$. При переходе от ДФ $G_{\eta,\gamma}$ к непрерывной G, охватывающей весь спектр дискретных значений ДФ $G_{\eta,\gamma}$, выражение (12) примет вид:

$$W_0(G,s)=\frac{\exp\left(\beta_{\eta,\gamma}\cdot\overset{*}{z}\right)+\exp\left(-\beta_{\eta,\gamma}\cdot\overset{*}{z}\right)}{\lambda\cdot\beta_{\eta,\gamma}\cdot(\exp\left(\beta_{\eta,\gamma}\cdot z_L\right)-\exp\left(-\beta_{\eta,\gamma}\cdot z_L\right))},,\ \left(\eta,\gamma=\overline{1,\infty}\right), \tag{15}$$

где $\beta_{\eta,\gamma}=\left(\frac{s}{a}+G\right)^{1/2}$, $G_H\le G\le\infty$.

В случаях гидродинамических систем, когда возможно оценить динамику процесса, передаточную функцию можно аппроксимировать функцией следующего вида:

$$W(s,G)=K\cdot e^{-\beta\cdot\Delta z},\ G_H\le G\le\infty, \tag{16}$$

где К, Δz – параметры гидролитосферного объекта.

Изменяя в (15) ω от 0 до ∞, а $G_н\le G\le\infty$, получим пространственных годограф, включающий весь спектр частотных характеристик по пространственным модам (рис. 1б).

Полученный годограф в виде логарифмических амплитудной и фазовой частотных поверхностей можно использовать интерпретации критерия устойчивости Найквиста по графикам. Положим, что характеристические полиномы рассматриваемой СРП по каждой пространственной моде не имеют полюсов, лежащих в правой полуплоскости. Тогда, критерием устойчивости замкнутой системы будет условие не пересечения линии среза модуля на совмещенной плоскости $Г_2$ и $Г_4$ с областью А, как показано на рисунке 2в. На рисунке 2а представлена амплитудная частотная поверхность, на рисунке 2г – фазовая поверхность.

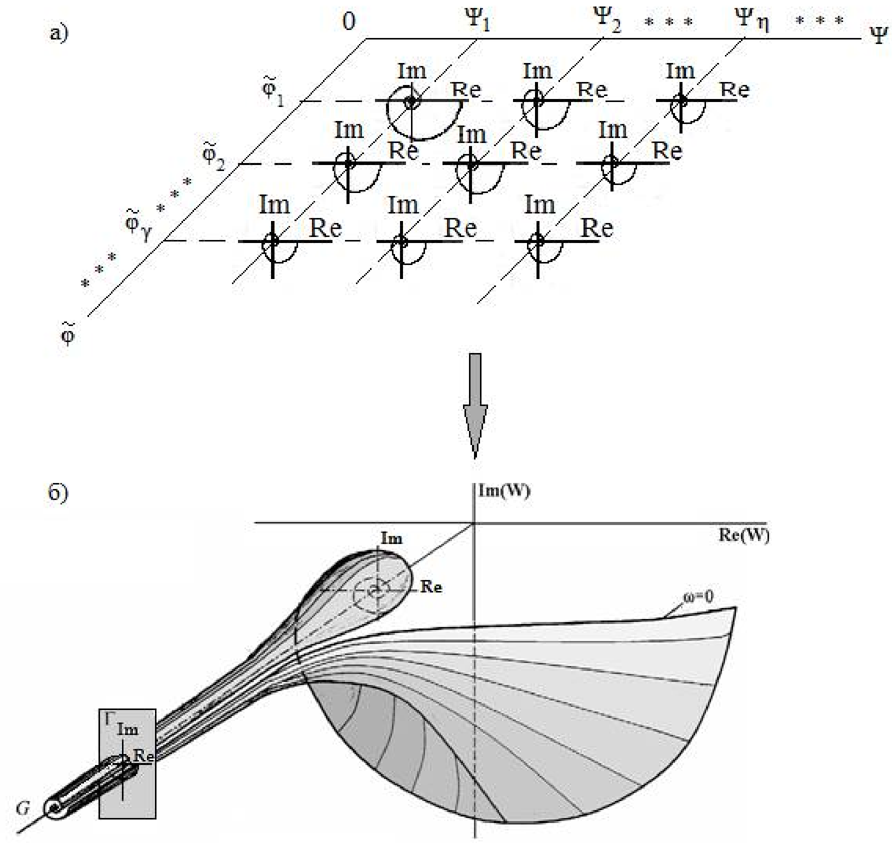


Рисунок 1 – Пространственный годограф

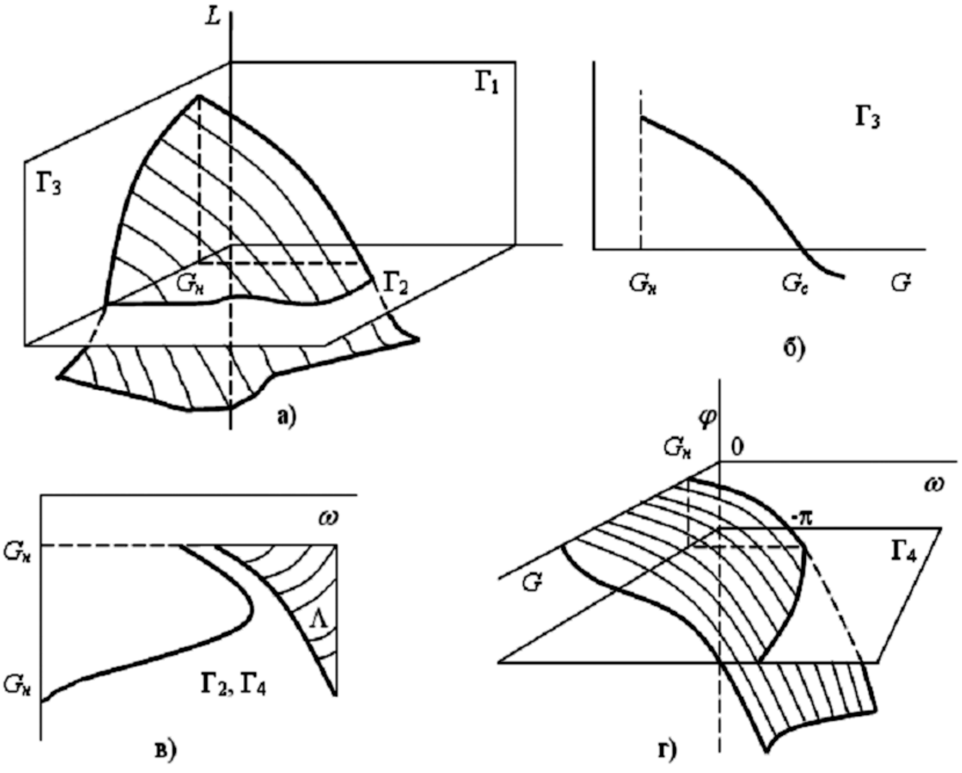


Рисунок 2 – Частотные поверхности

Рассмотрим частотный метод синтеза многомерных систем. Входные воздействия в распределенный регулятор реализуются в виде дискретной функции по пространству. Значения функции выхода распределенного объекта измеряются в конечном числе точек [12]. Матрица комплексных передаточных коэффициентов объекта, связывающая ξ-й вход с m-м выходом записывается в виде [1, 2]:

$$W_{0,\eta,\gamma}(j\omega) = \left[W_{m,\xi}\right], \left(m, \xi = \overline{1,n}\right). \tag{17}$$

Представим входное воздействие на объект в виде ряда:

$$\alpha_\gamma(\tau) = \sum_{\eta=1}^{n} C_\eta(\tau) \cdot \sin(\frac{\pi \cdot \eta \cdot y_\gamma}{L}); \ L = \Delta y \times (n+1); y_\gamma = \Delta y \times \gamma, (y = \overline{1,n}); \tag{18}$$

где Δy – заданное положительное число;

y_γ – точки дискретизации $\left(\gamma = \overline{1,n}\right)$.

Полагая в (17) $C_\eta(\tau) = \exp(j\omega\tau)$, где ω – круговая частота, определим реакцию объекта на каждую пространственную моду:

$$T_{\eta,\gamma}(j\omega\tau) = \exp(j\omega\tau) \cdot \sum_{\xi=1}^{n} W_{\gamma,\xi} \cdot \sin(\frac{\pi \cdot \eta \cdot \xi}{n+1}), \left(\eta, \gamma = \overline{1,n}\right). \tag{19}$$

Запишем комплексный передаточный коэффициент по каждой пространственной моде:

$$W_\eta(y_{\gamma,} j\omega) = \frac{T_{\eta,\gamma}}{\exp(j\omega\tau) \cdot \sin(\pi \cdot \eta \cdot \gamma) / (n+1)}, \tag{20}$$

Объект принадлежит к классу пространственно-инвариантных, если (9) записывается в виде:

$$W_\eta(y_{\gamma,} j\omega) = W_\eta(j\omega), \left(\gamma = \overline{1,n}\right) \tag{21}$$

Подставляя (20) в (21) и преобразуя, получим дискретный аналог условия пространственной инвариантности объекта [1, 2]:

$$\sum_{\xi=1}^{n} W_{\gamma,\xi} \cdot \sin(\frac{\pi \cdot \eta \cdot \xi}{n+1}) = W_\eta \cdot \sin(\frac{\pi \cdot \eta \cdot \gamma}{n+1}). \tag{22}$$

Запишем уравнение (22) в виде:

$$W \cdot \chi = W_\eta \cdot \chi_\eta; \ \chi_\eta = [\chi_{\eta,\xi}]; \ \chi_{\eta,\xi} = \sin(\pi \cdot \eta \cdot \xi / (n+1)); \tag{23}$$
$$\left(\xi = \overline{1,n}\right); \left(\gamma = \overline{1,n}\right).$$

Из соотношения (23) следует [1]: объект (17) принадлежит к классу пространственно-инвариантных, если χ_η, $\left(\eta = \overline{1,n}\right)$ являются собственными векторами матрицы W.

Заключение. Таким образом, ЧМ синтеза регуляторов представляется наиболее удобным инструментом при создании СРП, систем управления рассматриваемым процессом. В отличие от сосредоточенных систем частотный метод анализа и синтеза распределенных систем оперирует бесконечным набором пространственных мод (собственных вектор-функций оператора объекта) [10]. Состояние каждой пространственной моды описывается в бесконечном фазовом пространстве. Показано, что частотные характеристики распределенных объектов могут быть представлены бесконечной совокупностью частотных характеристик по пространственным модам. Поскольку рассматриваемые моды обладают свойствами ортогональности, то использование обобщенной координаты позволило перейти к амплитудным и фазовым частотным поверхностям. С помощью рассматриваемых частотных поверхностей возможно получить графическую интерпретацию критерия устойчивости Найквиста для выделенного класса систем с распределёнными параметрами. В современных работах авторов [4–5] разработаны специальные наборы звеньев и блоков, используемых в процедуре синтеза СРП управления.

Библиографический список

1. Першин, И. М. Анализ и синтез систем с распределенными параметрами / И. М. Першин. – Пятигорск : РИА КМВ. 2007. – 243 с.

2. Малков, А. В. Системы с распределенными параметрами. Анализ и синтез / А. В. Малков, И. М. Першин. – Москва : Научный мир, 2012. – 476 с.

3. Першин, И. М. Синтез систем с распределенными параметрами: проблемы и перспективы / И. М. Першин // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2005. – № 6. – С. 2–10.

4. Першин, И. М. Частотная концепция анализа и синтеза систем с распределенными параметрами : монография / И. М. Першин. – Пятигорск : ПФ СКФУ, 2021. – 172 с.

5. Чернышев, А. Б. Устойчивость распределенных систем с дискретными управляющими воздействиями / А. Б. Чернышев, Ю. В. Ильюшин // Известия Южного федерального университета. – 2010. – № 12. – С. 166–171.

6. Рапопорт, Э. Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами : учебное пособие / Э. Я. Рапопорт. – Москва : Высшая школа, 2009. – 677 с.

7. Хацкевич, В. П. О решении задачи аналитического конструирования регуляторов для распределенных систем / В. П. Хацкевич // Автоматика и телемеханика. – 1972. – № 3. – С. 5–14.

8. Бутковский, А. Г. Управление распределенными системами путем перемещения источника / А. Г. Бутковский, Ю. В. Дарнинский, Л. М. Пустыльников // Автоматика и телемеханика. – 1974. – № 5. – С. 11–30.

9. Бутковский, А. Г. Управление квантово-механическими процессами / А. Г. Бутковский, Ю. И. Самойленко. – Москва : Наука, 1984. – 256 с.

10. Техногенные процессы в гидролитосфере : идентификация, диагностика, прогноз, управление : Национальный научный форум «Нарзан-2011», 25–28 сентября 2011 года. – Кисловодск, 2011. – ISBN 978-5-89314-375-1.

11. Дровосекова, Т. И. Разработка математических моделей и синтез системы управления гидролитосферными процессами Пятигорского месторождения минеральных вод : дис. … канд. техн. наук / Т. И. Дровосекова. – Пятигорск : Северо-Кавказский федеральный университет, 2015.

12. Григорьев, В. В. Синтез распределенных регуляторов / В. В. Григорьев, С. В. Быстров, И. М. Першин. – Санкт-Петербург : СПбГУ ИТМО, 2011. – 202 с.

References

1. Pershin, I. M. *Analiz i sintez sistem s raspredelennymi parametrami* [Analysis and synthesis of systems with distributed parameters]. Pyatigorsk, RIA KMV, 2007. 243 p.

2. Malkov, A. V., Pershin, I. M. *Sistemy s raspredelennymi parametrami. Analiz i sintez* [Systems with distributed parameters. Analysis and synthesis]. Moscow, Nauchnyy mir Publ., 2012. 476 p.

3. Pershin, I. M. Sintez sistem s raspredelennymi parametrami: problemy i perspektivy [Synthesis of systems with distributed parameters: problems and prospects]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mechatronics, Automation, Management], 2005, no. 6, pp. 2–10.

4. Pershin, I. M. *Frequency concept of analysis and synthesis of systems with distributed parameters : monograph* [Chastotnaya konceptsiya analiza i sinteza sistem s raspredelennymi parametrami : monografiya]. Pyatigorsk, PF SKFU, 2021. 172 p.

5. Chernyshev, A. B., Ilyushin, Yu. V. Ustoychivost raspredelennykh sistem s diskretnymi upravlyayushchimi vozdeystviyami [Stability of distributed systems with discrete control actions]. *Izvestiya Yuzhnogo federalnogo universiteta* [News of the South Federal University], 2010, no. 12, pp. 166–171.

6. Rapoport, E. Ya. *Optimalnoe upravlenie sistemami s raspredelennymi parametrami : uchebnoe posobie* [Optimal control of systems with distributed parameters]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2009. 677 p.

7. Hackevich, V. P. O reshenii zadachi analiticheskogo konstruirovaniya regulyatorov dlya raspredelennykh system [On solving the problem of analytical design of regulators for distributed systems]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], 1972, no. 3, pp. 5–14.

8. Butkovskiy, A. G., Darninskiy Yu. V., Pustylnikov L. M. Upravlenie raspredelennymi sistemami putem peremeshcheniya istochnika [Managing distributed systems by moving the source]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], 1974, no. 5, pp. 11–30.

9. Butkovskiy, A. G., Samoylenko, Yu. I. *Upravlenie kvantovo-mekhanicheskimi protsessami* [Control of quantum mechanical processes]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 256 p.

10. *Tekhnogennye processy v gidrolitosfere : identifikaciya, diagnostika, prognoz, upravlenie : nacionalnyy nauchnyy forum «Narzan-2011», 25–28 sentyabrya 2011 goda* [Technogenic processes in the hydrolithosphere: identification, diagnostics, forecast, management : National Scientific Forum "Narzan-2011", September 25–28, 2011]. Kislovodsk, 2011. ISBN 978-5-89314-375-1.

11. Drovosekova, T. I. *Razrabotka matematicheskilh modeley i sintez sistemy upravleniya gidrolitosfernymi protsessami Pyatigorskogo mestorozhdeniya mineralnykh vod. : dis. ... kand. tekhn. nauk* [Development of mathematical models and synthesis of a control system for hydrolithospheric processes of the Pyatigorsk mineral water deposit : dis. ... cand. tech. sciences. Pyatigorsk, North Caucasus Federal University, 2015.

12. Grigorev, V. V., Bystrov, S. V., Pershin, I. M. *Sintez raspredelennykh regulyatorov*. Saint Peterburg, SPbGU ITMO, 2011. 202 p.